开放人文

机遇与混沌

[法] 大卫·吕埃勒 著　　刘式达　梁爽　李滇林 译

David Ruelle

上海世纪出版集团

机遇与混沌

[法] 大卫·吕埃勒 著　　刘式达　梁爽　李滇林 译

读书中文
精品奉献
http://rbook.net/bbs/

世纪出版集团　上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

机遇与混沌/(法)吕埃勒(Ruelle, D.)著；刘式达等译.
—上海：上海科技教育出版社，2005.4
(世纪人文系列丛书)
ISBN 7-5428-3792-3

Ⅰ. 机… Ⅱ. ①吕…②刘… Ⅲ. 混沌学—
普及读物 Ⅳ. O415.5-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 010054 号

责任编辑 潘 涛 侯慧菊
装帧设计 陆智昌

机遇与混沌
[法]大卫·吕埃勒 著
刘式达 梁 爽 李滇林 译

出　版 世纪出版集团 上海科技教育出版社
(200235 上海冠生园路 393 号 www.ewen.cc)
发　行 上海世纪出版集团发行中心
印　刷 商务印书馆上海印刷股份有限公司
开　本 635×965 mm 1/16
印　张 11.75
插　页 4
字　数 141 000
版　次 2005 年 4 月第 1 版
印　次 2005 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 7-5428-3792-3/N·660
图　字 09-2000-299 号
定　价 17.50 元

世纪人文系列丛书编委会

主任

陈 昕

委员

丁荣生 王一方 王为松 王兴康 包南麟 叶 路
张晓敏 张跃进 李伟国 李远涛 李梦生 陈 和
陈 昕 郁椿德 金良年 施宏俊 胡大卫 赵月瑟
赵昌平 翁经义 郭志坤 曹维劲 渠敬东 潘 涛

出版说明

自中西文明发生碰撞以来，百余年的中国现代文化建设即无可避免地担负起双重使命。梳理和探究西方文明的根源及脉络，已成为我们理解并提升自身要义的借镜，整理和传承中国文明的传统，更是我们实现并弘扬自身价值的根本。此二者的交汇，乃是塑造现代中国之精神品格的必由进路。世纪出版集团倾力编辑世纪人文系列丛书之宗旨亦在于此。

世纪人文系列丛书包涵“世纪文库”、“世纪前沿”、“袖珍经典”、“大学经典”及“开放人文”五个界面，各成系列，相得益彰。

“厘清西方思想脉络，更新中国学术传统”，为“世纪文库”之编辑指针。文库分为中西两大书系。中学书系由清末民初开始，全面整理中国近现代以来的学术著作，以期为今人反思现代中国的社会和精神处境铺建思考的进阶；西学书系旨在从西方文明的整体进程出发，系统译介自古希腊罗马以降的经典文献，借此展现西方思想传统的生发流变过程，从而为我们返回现代中国之核心问题奠定坚实的文本基础。与之呼应，“世纪前沿”着重关注二战以来全球范围内学术思想的重要论题与最新进展，展示各学科领域的新近成果和当代文化思潮演化的各种向度。“袖珍经典”则以相对简约的形式，收录名家大师们在体裁和风格上独具特色的经典作品，阐幽发微，意趣兼得。

遵循现代人文教育和公民教育的理念，秉承“通达民情，化育人心”的中国传统教育精神，“大学经典”依据中西文明传统的知识谱系及其价值内涵，将人类历史上具有人文内涵的经典作品编辑成为大学教育的基础读本，应时代所需，顺时势所趋，为塑造现代中国人的人文素养、公民意识和国家精神倾力尽心。“开放人文”旨在提供全景式的人文阅读平台，从文学、历史、艺术、科学等多个面向调动读者的阅读愉悦，寓学于乐，寓乐于心，为广大读者陶冶心性，培植情操。

“大学之道，在明明德，在新民，在止于至善”（《大学》）。温古知今，止于至善，是人类得以理解生命价值的人文情怀，亦是文明得以传承和发展的精神契机。欲实现中华民族的伟大复兴，必先培育中华民族的文化精神；由此，我们深知现代中国出版人的职责所在，以我之不懈努力，做一代又一代中国人的文化脊梁。

上海世纪出版集团
世纪人文系列丛书编辑委员会
2005年1月

绪　言

Suam habet fortuna rationem *

“机遇有其原因”，佩特罗尼乌斯(Petronius)说。但我们也许会问：什么原因？并且，什么是机遇呢？机遇是怎么出现的？未来如何不可预测？物理学和数学对这些问题给出了一些答案。答案是谨慎的，且有时只是试探性的，但仍然值得了解，这些正是本书的主题。

物理学定律是确定性的。那么，机遇又是如何进入到对宇宙的描述中去的呢？正如将要看到的那样，它通过许多途径表现自己。我们还将看到，未来的可预测性(predictability)受到严格的局限。我对于机遇和不可预测性(unpredictability)各个方面的介绍将大部分遵循公认的(或可接受的)科学思想，无论新旧。特别是，我将详细探

---

* 拉丁文：机遇有其原因。——译者

讨混沌这一现代思想。所采用的方式肯定是非专业的，可以在本书中找到的少量方程都能够被忽略而不必担心会有多少损失。原则上，中学物理和数学就足以用来理解本书的正文部分了。然而，我在尾注中就不大受限制了：它们的范围从非专业的注释，到针对我的那些同行们的非常专业的参考文献。

提到科学同行，他们中一些人将会因为我对科学家和科研领域不那么辉煌的描述而感到不安。对此，我并无歉意：如果科学是对真理的探讨，那么对于科学是如何做出来的，难道不应该讲真话吗？

1990 年夏

于 *Bures-sur-Yvette*

致　　谢

在写作本书过程中，我得益于与许多同行的讨论。他们之中，我特别感激戈尔茨坦(Shelly Goldstein)，尽管他或许会对我最终写就的文本感到沮丧。尼古拉·吕埃勒(Nicolas Ruelle)对文风的改进提出了有用的建议。怀特曼(Arthur Wightman)和沃德(Laura Kang Ward)为捍卫英语而高贵地战斗。上田晼亮(Yoshisuke Ueda)和兰福德(Oscar Lanford)再现了精美的计算机图形结果。最后，德尔诺伊斯(Helga Dernois)沉着而坚毅地将相当凌乱的手稿打印出来。感谢他们所有这些人。

目录

1 绪言
3 致谢

1 1. 机遇
6 2. 数学和物理学
12 3. 概率
18 4. 抽彩和星象
25 5. 经典决定论
34 6. 博弈
40 7. 初条件敏感依赖性
46 8. 阿达马、迪昂和庞加莱
52 9. 湍流：模态
59 10. 湍流：奇怪吸引子
67 11. 混沌：一个新的范式
75 12. 混沌：影响
83 13. 经济学

89 14. 历史的演化
94 15. 量子：概念框架
102 16. 量子：清点状态
108 17. 熵
114 18. 不可逆性
120 19. 平衡态统计力学
127 20. 沸腾的水和地狱之门
134 21. 信息
141 22. (算法)复杂性
148 23. 复杂性与哥德尔定理
155 24. 性的真意
161 25. 智能
167 26. 结语：科学

1. 机　　遇

巨型计算机有朝一日很快就会开始与数学家竞争，且也许就此而使数学家永远失业。至少我是对我杰出的同行——比利时数学家德利涅(Pierre Deligne)这么说的。为了惹恼他，我提到了一些已经在下棋方面表现极佳的机器，和只有在计算机的帮助下才能完成的四色定理的证明。[1]当然，目前的机器还只是用于从事重复性的甚至有点愚蠢的工作。但没有理由认为它们不能变得更加灵活和万用，不能以更快的速度和更高的精度模仿人的智能行为。这样在50或100(也许200)年内，不仅计算机会帮助数学家工作，而且我们还会发现它们能够采取主动，引入新的富有成果的定义，提出假设，然后得到远远超出人类智慧能力之外的定理证明。毕竟，我们的大脑并不是以推演数学为目的、而是以帮助我们打猎、觅食、打仗和维持社会关系为目的的自然演化塑造出来的。

当然，德利涅对于我有关数学未来的想法并没有显出很大的热情。稍微迟疑了一会儿，他告诉我只有那些他独自能够全部理解的

结果才能使他感兴趣。他说，这就排除了一方面在计算机的帮助下得到的定理，另一方面一些得自许多数学家的工作，而非一个人能够完成的非常长的数学证明。他这里暗指那个著名的有关简单有限群分类的定理证明。[2]这个证明由许多部分组成，长达5000多页。

基于我刚才所说的，人们可以很容易地描绘出一幅关于科学现状及其未来的不祥景象。确实，如果对于一个数学家来说，独自精通一个问题——仅仅一个定理证明——变得很难的话，那么他在科学上其他学科的同行们的情况会更糟。无论是物理学家还是医生，为了更有效地工作，必须借助于他们所不能理解的工具。科学是无所不在的，但效力于它的人却是专业化的，而且他们的见解常常有限。毫无疑问，自从科学诞生以来，科学研究的智力和社会背景都已经改变了很多。现在我们所谓的科学家当时被称为哲学家，他们努力想得到对我们这个世界的全局认识，得到自然事物的综合认识。伟大的牛顿(Isaac Newton)就曾特别地致力于数学、物理、金丹术、神学以及和预言有关的历史研究。[3]难道我们已经放弃孕育了科学的哲学探索吗?

从来没有，哲学探索虽然用了新的方法但仍然是一切的中心。这就是我将要在这本小册子里所要努力说明的。因此，这里的讨论将没有科学超凡的技术本领，没有火箭和粒子加速器，没有医学突破和核危机，也没有形而上学。我将带上17世纪或18世纪诚实人的哲学眼镜，来回顾20世纪的科学成就。我的回顾将以机遇(chance)为向导——字面上讲——因为机遇研究是我将追随的线索。

机遇、不确定性和盲目的运气，不是很消极的概念吗? 它们不都是些属于占卜术士的而不属于科学家的范畴吗? 事实上，对机遇

的科学探索是可行的，它起始于帕斯卡(Blaise Pascal)、费马(Pierre Fermat)、惠更斯(Christiaan Huygens)和伯努利(Jacques Bernoulli)对机遇游戏的分析。在这些分析的基础上诞生了**概率运算**，其长期被认为是数学的一个小分支。概率运算的一个中心事实是，如果大量重复抛掷一枚硬币，那么正面向上(或反面向上)的比例将接近50%。在这个例子中，虽然每次抛硬币的结果是完全不确定的，但是大量抛掷却会产生一个大致确定的结果。这种当我们观测**大量事件**或**大系统**时从不确定(uncertainty)到大致确定(near certainty)的转变，是机遇研究的一个基本主题。

在1900年左右，许多物理学家和化学家仍然否认物质是由原子和分子组成的。另外有一些则早已接受了这样的事实：在一升空气中有多得难以置信的分子，它们沿各个方向高速运动，并以非常可怕的无序状态相互碰撞。这种被称为分子混沌(molecular chaos)的无序(disorder)是存在于小体积中的大量随机性(randomness)——或机遇。有多少随机性？有多少机遇？这些问题非常有意义，而奥地利人玻尔兹曼(Ludwig Boltzmann)和美国人吉布斯(J. Willard Gibbs)在1900年左右创立的物理学的一个分支——**统计力学**——给出了一个答案。一定温度下，一升空气或一千克铅中的机遇量可以用这一升空气或一千克铅中的**熵**(entropy)来衡量，现在我们已经有办法很精确地确定这些熵的大小。我们发现机遇是可以被驯服的，它对于认识物质至关重要。

你或许会因此而认为随机或偶然发生的事都没有什么意义。稍微思考一下就会发现事实不是这样的：在一个给定的人群中血型是随机分布的，但是在输血时是A+还是O−并不是没有意义的。美国数学家香农(Claude Shannon)在20世纪40年代晚期创立的**信息论**

(information theory)允许我们计算原则上有意义的消息(messages)中所蕴涵的信息(information)。我们将要看到，一条消息中的平均信息被定义成是一组可能消息中机遇(或随机性)的总量。为了表明这是一个自然的定义，请注意通过选择一条消息，人们就破坏了这一组可能消息中所呈现的随机性。因此，信息理论就和统计力学一样，也与计算随机性的总量有关。所以这两个理论是紧密相关的。

谈到有意义的消息，我想谈谈一些载有特别重要信息的消息：遗传消息(genetic messages)。如今，公认的事实是，动物和植物的遗传特征由染色体中的DNA传递。DNA(脱氧核糖核酸)也存在于细菌和病毒中(在有些病毒中，它被核糖核酸所替代)。DNA被证明是一条由四种元素组成的长链，这四种元素可以用A，T，G，C四个字母代表。因此，遗传特征就是用这个四字母字母表写成的长长的消息串。当细胞分裂的时候，这些消息被复制，并伴随一些随机的错误；这些错误就是所谓的突变(mutations)。因此，这些新的细胞或个体就和它们的祖先有了一点儿不同，从而更能够或不太能够存活和繁衍。然后，自然选择保留一些个体，而淘汰掉不太适应或不太幸运的那些个体。所以，关于生命的基本问题可以表述为，在有机遇存在的情况下，遗传消息的创造和传递。生命起源和物种演化的重要问题并没有因此而解决，但是通过用信息的创造和传递来表述这些问题，我们将获得一些具有启发性的观点以及一些相当明确的结论。

但是在探索机遇在生命过程中的创造性作用之前，我想带领你，我的读者，去长途巡看其他相当多的问题。我们将讨论统计力学和信息论；我们将谈到湍流、混沌以及机遇在量子力学和博弈论中的作用。我们还会扯开话题，去谈谈历史决定论、黑洞、算法复

杂性等等。

我们这个长长的巡游将沿着两大智力领域间的边界线进行，一边是严格的数学，另一边是包括所有自然科学的广义上的物理学。同时，密切关注以其勇敢和常常悲惨的努力去领会事物本质的人类心智(或大脑)的活动，也将会很有趣。在机遇问题之外，我们还会试着去了解数学的奇妙，物理世界的奇妙和我们人类心智的奇妙之间的某种三角关系。作为开始，我想讨论一下数学和物理学的一些游戏规则。

注　释：

1. 四色定理。设想我们有一张地图或一个地球仪，上面标示着不同的国家。为了简单起见，我们假设没有海洋。并且，各个国家之间彼此相连(而不是由相互分离的一块一块组成的)。我们想给每个国家标上某种颜色，从而使具有共同边界的两个国家的颜色不同。(我们允许边界上只有有限的几个共同点的两个国家颜色相同。)我们需要多少种颜色呢？答案是：无论何种情况下，四种颜色就足够了。这就是四色定理。

四色问题的解决归功于阿佩尔(Kenneth Appel)和哈肯(Wolfgang Haken)。学术论文是：K. Appel and W. Haken, "Every planar map is four colorable, Part Ⅰ: Discharging," *Illinios J. Math*. 21 (1977): 429～490; K. Appel, W. Haken, and J. Koch, "Every planar map is four colorable, Part Ⅱ: Reducibility," *Illinios J. Math*. 21 (1977): 491～567。

更多的普及说明，请参看 K. Appel and W. Haken, "The solution of the four-color-map problem," *Scientific American*, October 1977, pp. 108～121; K. Appel and W. Haken, "The four color proof suffices," *The Mathematical Intelligencer* 8 (1986): 10～20。

2. 有关列举简单有限群问题的简要介绍，请参看 J. H. Conway, "Monsters and Moonshine," *The Mathematical Intelligencer* 2 (1980): 165～171。应该指出的是，简单有限群的分类问题涉及到许多计算机的工作和数学家们非常大量的时间。

3. 牛顿的传记中，最权威的是韦斯特福尔(R. Westfall)所著的 *Never at Rest* (Cambridge: Cambridge University Press, 1980)。牛顿各种智力爱好之间的相互影响是令人着迷的。这些爱好包括从数学、物理学上最伟大的成就，到有关金丹术、历史和宗教等会导致其声名狼藉的臆想(以现在的标准来看)。对牛顿智力成果进行审查，裁定出一些优秀的，剩下的最好忘掉，这似乎是一个相当吸引人的主意。然而，如果想要了解牛顿头脑中智力创造的发展过程，我们不能遗忘他的那些不光彩的臆想。在他想攫取宇宙意义的欲望中，对预言或金丹术研究的重要性绝不亚于他在万有引力或微积分学上的工作。显然，有关牛顿的头脑是如何运作的，还有很多有待了解。韦斯特福尔的书中似乎显现了这样一个不幸的事实：伟大的牛顿显然没有任何可以辨认得出的幽默感。

2. 数学和物理学

数学才能常常发展于年龄比较小的时候。这是个普遍的现象，俄罗斯著名数学家柯尔莫哥洛夫(Andrei N. Kolmogorov)添加了一个奇特的见解。他认为，恰恰就在数学才能开始显现的时候一个人自身的正常心理发展就停止了。照这样说，柯尔莫哥洛夫给自己的心理年龄是12岁。而他给他的同胞，很长一段时间都是苏联科学院里非常有实力和受到敬畏的成员，维诺格拉多夫(Ivan M. Vinogradov)的心理年龄，只有8岁。按照柯尔莫哥洛夫的说法，维诺格拉多夫院士8岁的年龄正相应于小男孩扯掉蝴蝶翅膀，把旧铁罐儿系在猫尾巴上的时候。

或许为柯尔莫哥洛夫的理论找一些反例并不难，[1]但这个理论显然常常都是对的。想起一个同事的极端例子：他的心理年龄只有6岁左右，这就引来了一些实际问题，例如当他不得不单独旅行的时候。这位同事作为一名数学家，表现得相当不错，但我想，在攻击性要强得多的物理学界，他是难以生存的。

是什么使数学如此特殊，如此不同于其他科学领域？数学理论的出发点，由对确定数量的一些数学对象（不用数学对象，我们也可以用词汇或短语，因为在某种意义上这正说明了它们是些什么）的若干基本断言组成。从基本假设开始，人们力图通过纯粹的逻辑推出被称为定理的新的断言。数学中用到的词汇可能是熟悉的，例如“点”和“空间”，但在做数学时，重要的是不要太相信平常直觉的知识，事实上只能用到开始的时候给出的几个基本断言。如果你决定用“椅子”和“桌子”代替“点”和“空间”，它是完全可以接受的，甚至在某些情况下它可以是个不错的主意：数学家们并不反对进行这种转换。如果你喜欢，数学工作其实类似于依照非常严格的规则进行的语法练习。从已经选择出来的基本断言开始，数学家构造出一连串进一步的断言，直至一个看起来特别精妙的断言产生。然后，数学家的同事们被邀请去看这个新近产生的断言，他们会赞美它说：“这是个漂亮的定理。”那一连串中间的断言构成了定理的证明，而能够被清楚而简明地表述出来的定理常常需要一个格外长的证明。证明的长度正是数学的兴趣所在，并且事实上在哲学上具有基本的重要意义。有关证明长度的问题与算法复杂性（algorithmic complexity）和哥德尔定理（Gödel's theorem）有关，这两个问题将在下面的章节讨论。[2]

因为数学证明很长，所以要捏造它们也很困难。数学家要构造一长串没有任何错误的断言，留意自己正在做什么，正要去什么地方。要寻求各种方法使自己能够推断什么为真、什么为假、什么有用、什么无用；使自己能够确信那些应该引入的定义；使自己能够确信正是那些关键的断言将可以让他以一种自然的方式建立一个理论。

你不应该以为数学游戏是任意和没有根据的。不同的数学理论

之间有很多的联系：一个理论的对象也许在另一个理论中找到了解释，接着它导致了一些富有成效的新观点。数学有着深刻的统一性。数学不仅仅只是一些诸如集合论、拓扑学和代数学等，各自都有着自己基本假设的孤立理论的集合，而是一个统一的整体。数学是一个大王国，这个王国属于那些有先见之明的人。那些拥有数学直觉的先知们以他们的才能而具备了远远优于他们那些盲目同时代人的感觉。他们感觉非数学家们就好像喷气机飞行员感觉地面上的人们，或古时候英国人感觉欧洲大陆上的人们一样。

数学是一种智力的瑜珈，强求、严格和禁欲。而一个数学家，一个真正数学家在他的这门艺术中倾注甚多。语言的或非语言的，有意识的或无意识的，相异的概念和奇怪的关系充斥了他的思想。[我们常常可以看到无意识在数学发现中起作用：庞加莱(Henri Poincaré)曾经记述过一个这方面的漂亮例子。][3]由于数学思想的绽放而引起的心智入侵，以及这种思想的不可思议，使得数学家稍稍有异于其余人，而人们也就可以理解(像柯尔莫哥洛夫提出的那样)他的心理发展有时可能会受到抑制。

那么物理学家又是怎样的呢？数学家和物理学家常常表现得像一对有敌意的兄弟，并趋向于夸大他们的差别。但是正像伽利略(Galileo)已经指出的那样，数学是物理学的语言，[4]而且一位理论物理学家总是某种程度上的数学家。实际上，阿基米德(Archimedes)、牛顿和其他许多科学家对物理学和数学都有着辉煌的贡献。事实在于物理学是和数学紧密相联的，但也有着显著的不同。现在就让我试着做一番解释。

物理学的目的，是使围绕着我们的世界有意义。典型地讲，如果你是一个物理学家，你不会力图同时理解每一件事情。你情愿逐

个地去考察实在(reality)的不同片段。你将对给定的实在片段进行理想化，并尝试用一种数学理论去描述它。因此，你从选择一类现象开始，然后定义出那类现象可操作的物理概念。这样就明确了描述这类现象的物理框架，接着你还得选择一个数学理论，并在这个数学理论的对象和物理概念之间建立起一种对应关系。[5]正是这种对应关系构成了物理理论。从原则上讲，物理理论从物理量和数学量之间产生的那个对应关系越精确，所能描述的一组现象越广泛，当然它也就越好。但是在实践中，数学的可处理性也非常重要，对于一个给定的应用，当他择性理论更为凌乱，并不真的更加精确的时候，物理学家通常会选择使用简单而方便的那一个理论。

最好能够意识到，物理概念的操作定义并不是一种形式定义。随着我们认识的发展，我们可以进一步分析这些操作定义，但比起它们所联系的数学理论，它们仍是不太精确的。例如，当描述化学实验时，你会想要详细说明那些相当纯的反应物，在某些情况下，你也许还会提出更加精炼的要求，严格限制具有灾难性催化作用的杂质的数量。但如果你坚持要预先知道每种可能杂质的精确数量，也就不必做任何实验了。如果你研究物理学，你马上就必须面对那个表观悖论：你手头可以把握的对物理对象的控制少于你对并不实际存在的数学对象的控制。这对一些人来说是非常令人气愤的，事实上，这也就是为什么他们选择成为数学家而不是物理学家的一个基本原因。

物理理论的一个普通例子，就是我所谓的掷骰子游戏理论(theory of the game of dice)。人们力求认识的那个实在片段，即当进行掷骰子的游戏时，我们观察到了什么。这个理论中的一个操作上定义的概念是独立性(independence)的概念：如果在两次投掷之间充分地摇动骰子的话，我们就说相继的这两次投掷是独立的。这里

是这个理论预测的一个例子：当独立大量投掷两个骰子时，其结果数字之和为3（即一个骰子是1，另一个是2)的概率约为1/18。

现在我们总结一下。将数学理论粘接在物理实在片段上，我们就得到了一种物理理论。已经有了许多这样的物理理论，它们涵盖了大量不同的现象。而且对于某种给定的现象，通常可以有几种不同的理论。一些较好的情形是，通过近似(通常是不受约束的近似)人们可以从一个理论过渡到另一个理论。而在其他一些情形下，不同物理理论之间的对应关系会因为它们基于不一致或表观矛盾的物理概念而引起严重的概念麻烦。总之，从一个理论跳到另一个理论是做物理学之术的一个重要部分。职业物理学家们会说他们正考虑量子修正或非相对论性极限，或者他们根本什么也不说，因为他们所采纳的观点是“在事物的情境中一目了然的”。在这种情况下，物理学话语听起来即使不是完全混乱，也常常可能有点儿语无伦次。物理学家如何在这样一片混乱中找到他们的道路呢?

要回答这个问题，你必须记住，因为物理学描述着我们生活于其中的唯一一个物理宇宙，所以它具有根本统一性。数学的统一性归因于不同数学理论之间的逻辑关系。物理理论则恰恰相反，它们并不需要逻辑上的一致性；它们具有统一性，是因为它们描述着同一个物理实在。物理学家对他们力图描述的那个实在通常没有关于存在性的怀疑。他们常常需要几种逻辑上不相容的理论去覆盖对某个给定类型现象的描述。他们对这种不一致性当然感到惋惜，但还是不会走到将不相容理论的任何一个丢弃的地步。他们除非找到能够以统一的方式说明所有观测事实的一种更好的理论，否则会一直保留这些不相容的理论。

最后给出一些告诫。不要从事于关于物理学是决定性的还是概

然性的，是定域的还是非定域的等等这类一般的抽象讨论。这些问题的答案依赖于所考察的物理理论，在那些理论中是如何引入决定论(determinism)、机遇或定域性(locality)的。有意义的物理讨论总是需要一个可操作的背景。无论它是由现有理论提供的，还是你不得不自己提出的对于至少是原则上可完成实验的足够明晰的描述。

注　释：

1．数学家们事实上是有些异类的人群。这意味着：一些数学家以非常直截了当的方式处理问题，并将其成功归因于他们了不起的专业能力。另一些则翻来覆去地观察，直到他们找到一个可以使问题轻松解决的精妙窍门儿。（注意，这样的精妙窍门儿并不总是存在的。）因此，并非所有的数学家都是一个样子的，甚至其中一些看上去一点儿都不像数学家。但数学家之间常有一种家族的氛围。更普遍地，这种氛围存在于职业科学家之间。它甚至真实可觉。我在陌生的地方参加科学会议，已经不止一次是通过在街上跟随一位看起来像是同行的人来找到我的目的地。其他人也深有同感。

2．参看第 22 章和第 23 章。简言之，哥德尔不完全性定理所述如下。关于整数 1，2，3，...，在公认的基本断言的框架内，哥德尔指出一些断言既不能被证明，也不能被否证：这些是*不可判定的*(undecidable)断言。即使人们增加基本断言的数量，但总是存在一些不可判定的断言。

3．参看 H. Poincaré，"L'invention mathématique"（数学创造），*Scinece et Méthode* 的第 3 章(Paris：Ernest Flammarion，1980)；英译本：*Science and Method*(New York：Dover，1952)。另见 J. Hadamard，*The Psychology of Invention in the Mathematical Field*(Princeton：Princeton University Press，1945；再版，增订版，New York：Dover，1949)。

庞加莱探讨了一个例子：他不再有意识地思考的一个问题，它的解后来突然十分清晰地在他脑海中展现出来。显然，是某种无意识的工作在进行着。这种工作所涉及的，与其说是深层的无意识，不如说是弗洛伊德所谓的*前意识*。但贴上像前意识这样的标签，对解释所发生的这些事似乎于事无补。我想，无意识或前意识在科学发现中的作用对许多科学家来说都是熟悉的，但对此的真正理解却还未能实现。

4．以下是摘自伽利略的 *Saggiatore*(1623)中的一段："哲学是写在一本永远在我们眼前展开的非常巨著上的(我指的是宇宙)，但如果人们没有先学会著书所用的语言，认识拼写所用的字符，书的内容将无法被理解。它是用数学语言写就的，字符就是三角形、圆，和其他几何图形……"

5．物理理论的数学远远超出了运算中定义过的量，引入了还不能直接观测到的物质，甚至在原则上也是如此。当然，引入不可观测的物质是件非常微妙的事儿，从哲学的立场出发，人们也许被怂恿去拒绝它。但哲学上这种先验态度，至少在一些情况下，显出是一种有害的思想。例如，物理学家丘(Geoffrey Chew)在 20 世纪 50 年代后期建议，粒子物理学家应该致力于研究一种所谓 *S 矩阵*的数学对象(它与实验量的关系非常密切)，而不用理会不可观测的*量子场*。丘的想法在某种意义上是很有道理的。然而，事实表明，对场的考察已硕果累累(无论在丘的建议之前还是之后)。并且，我们决不希望没有它们。

3. 概　　率

对机遇的科学解释，肇始于我们引入概率之时。概率的物理概念似乎是清楚而基本直观的概念，但这决不意味着这个概念是容易整理和公式化的。从直觉到科学，我们永远要非常小心谨慎地走。现在让我们更仔细地考察这个问题。

“今天下午十有八九要下雨，所以我要带上雨伞。”这种涉及到概率的说法在我们做决定时总是有用的。将要下雨的概率估计为9/10，或90%，或0.9。一般说来，概率计算从0到100%，或用更加数学的语言，则是从0到1。概率0（0%）相当于不可能性，概率1（100%）相当于确定性。如果一个事件的概率既不是0也不是1，那么这个事件就是不确定的，但我们对于这个事件的不确定性是不完全的。例如，一个概率为0.000 001（即百万分之一次机会）的事件是非常不可能发生的。

我们工作的成功依赖于环境，有些环境是确定的，有些则不是。因此，正确估计不确定环境的概率是非常重要的，这就需要概率的物

理理论(physical theory of probabilities)。我坚持要求它是一个物理的理论，是因为仅仅能够计算概率是不够的。我们还必须在操作上使我们的结果能够与物理实在相比较。如果我们对与物理实在的关系问题不给予充分的注意，我们很容易就会被诱入自相矛盾的圈套。因此，我们应该对像“今天下午会下雨的概率是0.9”这样的说法多加留神。退一步说，这个断言的操作含义并不明确，因此，它在这个问题上的地位也就有些可疑。

我们现在考虑下列断言：“当我向上抛硬币时，这枚硬币落下来正面向上的概率是0.5。”这话听上去显然是有道理的，至少在我抛出硬币之前是这样，但当硬币已经落下以后，它显然就是错误的了，因为这时不确定性已经消失。在什么时刻，硬币决定了落下时会是正面或是反面？假设你接受经典决定论的原理，那么宇宙在一个时刻的状态就决定了它在以后任何时刻的状态。也就是说，硬币落下来时将会是哪一面在宇宙创立之初就已被决定了！这是否意味着我们不得不放弃概率，或是说我们只有在用量子理论取代经典理论的时候才可以提到它？不是的！这不是研究物理学的方式。合理的态度是在非常不受限制的框架内引进概率，根本不提经典力学或量子力学。在数学上和可操作上明确了我们的概念以后，我们将以更有利的地位来讨论概率与决定论、量子力学等等的关系。

关于引入概率，下面是我所想要捍卫的哲学立场。对于各种不同类型的现象(前面我所称的“实在片段”)，都涉及概率的理想化。因为这些理想化有用，所以它们引起了人们的兴趣：它们可以帮助我们知道掷硬币时出现正面或反面的概率是相等的。它们可以帮助我们知道，如果你掷一枚硬币20次，每次都是正面的概率小于百万分之一。估算概率有某种更为实质性的东西，因而它取代了不明确的

“机遇”。我们下面的任务就是给出这某种东西在逻辑和操作上一致的结构。

如果不熟悉概率论（或一般硬科学），你会发现本章的其余部分有点令人生畏。尽管如此，绝不要跳过它！我希望能够概述一个物理理论的例子：操作上定义的物理概念、数学理论，以及物理概念和数学概念之间的关系。概率的物理理论正是我所希望描述的。从任何标准讲，它都是一个非常简单的物理理论。

概率论是摆弄像意味着事件“A”的概率是90%

$$概率(“A”)=0.9$$

这样的断言的艺术。从数学的观点来看，事件“A”只是一个应当按照一定规则加以处理的符号。而在一个物理理想化框架内，事件“A”真的是一个事件，诸如“今天下午要下雨”，这必须在操作上加以明确。（例如，我可能决定下午去散散步，而如果下雨了的话，我会注意到的。像物理学通常的情况那样，这个操作定义有些不太严密：在今天下午结束之前，我可能被一辆卡车撞倒，这就结束了我的气象观测。）

从数学的观点来看，事件“非A”只是一个新的符号集合。而在我们想考察的所有物理理想化中，事件“非A”对应于事件“A”决不发生这样一个事实。在上述例子中，“非A”就是指“今天下午不下雨”。

除了“A”以外，我们现在引入一个新事件“B”。从数学的观点来看，这就允许我们引进新的符号集合，即“A或B”和“A与B”。这些新的符号集合仍然是一些事件。在物理理想化中，“B”可能意味着“今天下午没有雨，但是有雪”或“我掉在地上的那片面包涂奶油的一面朝下”。而事件“A或B”物理上对应于“A”发生

或“B”发生，或“A”和“B”都发生。事件“A 和 B”则对应于“A”和“B”都发生。

现在我们可以通过列出三个基本断言(即规则)，来完成概率的数学表述：

(1) 概率(“非 A”) = 1 − 概率(“A”)

(2) 若“A”和“B”是*不相容的*，

则概率(“A 或 B”) = 概率(“A”) + 概率(“B”)

(3) 若“A”和“B”是*独立的*，

则概率(“A 与 B”) = 概率(“A”) × 概率(“B”)。

我们过一会回来讨论这三个规则，但需要留意它们涉及了两个还未定义的新概念：*不相容*事件和*独立*事件。在一部关于概率的论著中，应该介绍一些有关如何处理*非*(non)、*与*(and)及*或*(or)的规则，并介绍不相容事件和独立事件等数学概念。还应该加上一些有关无穷事件集合的基本断言。这些确实都重要，但对我们打算做的事情来说不大要紧，因此我们将略过它们。

我们刚刚——概略地但并非不正确地——干掉了概率计算的数学基础。[1]现在剩下的同样重要的任务，是明确概率的物理框架。说得更确切些，是各种各样的物理框架，因为概率会在各种全然不同的情况下出现，且操作定义必须按情况逐个地给出。这里我们将就自己的要求作一些一般的讨论。

在物理理想化中，如果两个事件不能同时发生，它们就被称为是*不相容的*。假设事件“A”和“B”分别是“今天下午要下雨”和“今天下午没有雨，但有雪”。那么“A”和“B”是不相容的，而规则(2)指出要将它们的概率相加：90%下雨的机遇加上5%无雨有雪的机遇，得到下雨或下雪的机遇是95%。这在直观上是令人满意的。

如果两个事件之间“毫无关系”，就被称为是独立的，即指这样的事实：平均来说，一个事件的实现对另一事件的实现没有影响。假设事件“A”和“B”分别是“今天下午要下雨”和“我掉在地上的那片面包涂奶油的一面朝下”。我认为这两个事件之间毫无关系，相互独立。运用规则(3)，它们的概率应该相乘：下雨的概率90%乘以把奶油涂在地板上的概率50%，得出两件事都发生的概率为45%。这在直观上是令人满意的：要下雨的概率有90%，面包掉在地上涂奶油的一面会朝下的概率有一半，那么室外既下雨、奶油又在地板上的概率就有45%。[2]

于是我们就证明了规则(2)和(3)在直观上是合理的。至于规则(1)，它不过指出，如果下雨的概率是90%，那么不下雨的概率就是10%，这几乎是无可辩驳的。

在我们刚刚讨论的各种概念中，独立性的概念显然是最难处理的。经验和常识告诉我们有些事件是相互独立的，但偶尔也会有和常识相反的意外。因此，我们应该证明假设为相互独立事件的概率遵循规则(3)的规律。并且也应该对操作定义加以非常仔细的斟酌。所以，在掷骰子时在相继投掷之间应该充分地摇动骰子。只有这样才能认为这些投掷是独立的。

很好，我们现在知道该如何摆弄概率了，但我们还不知道它们在操作上对应于什么！以下就是决定“A”的概率的方法：在“A”可能发生的条件下进行大量独立的实验，然后观测“A”实际出现的比例：这个比例就是“A”的概率。(对数学家而言，“大量的”实验意味着令一个数趋向于无穷大。)例如，如果你抛掷一枚硬币大量次数，那么正面朝上的情况大概有一半，即相当于0.5的概率。

现在我们已经有了漂亮的操作定义，我们会问事件“今天下午要

下雨”的概率指的到底是什么。 事实上，要大量地独立重复“这个下午”显然是困难的。 某些纯粹主义者(purists)就会因此而说所讨论的概率毫无意义。 然而，我们也许能够赋予它一个含义，例如在计算机上进行大量(与我们目前所知道的气象知识相一致)的数值模拟，找出模拟得到下雨结果的比例。 如果我们得出下雨的概率是90%，连纯粹主义者也会带上他们的雨伞。

注　释：

1．由柯尔莫哥洛夫奠立的概率微积分学的数学基础，在数学上是值得尊敬的。(正是同一个人，我们在第 2 章的开头讨论了他有关数学家心理的理论，在后面我们还会提到他的湍流理论。)权威的参考文献是 A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Erg. Math. (Berlin: Springer, 1933)；英译本：*Foundations of the Theory of Probability* (New York:Chelsea, 1950)。

2．我们一定要给出事件独立性的物理定义。 但是，称“相互之间没有什么关系”的两个事件是独立的，这几乎不能被称为操作定义。 在特定情况下提出操作定义，其有效性可以通过结果检验，这最好被称为是一条形而上的原则。 但为什么不使用独立性的数学定义[基本上就是断言(3)]，并通过统计检验核证？ 原则上，这是表达事物的一个简洁方式，也是教科书上所用的方式，但它不是实际中使用的方式。

事实上，统计检验的耗费巨大，且常常没有什么说服力。 因此，科学家们首先凭着两个事件相互之间没有什么关系，猜测它们是独立的。 然后考虑独立性被破坏的可能原因。 只有到最后，他们才会求助于统计检验。

4. 抽彩和星象

上一章我用数学的基本规则、操作定义等等介绍了概率的概念，你也许怀疑所有那些谨慎的防范措施是否真的都必要。毕竟，我所讲的那些可以被归纳成寥寥数语：不相容事件的概率相加（得到或事件的概率），独立事件的概率相乘（得到与事件的概率），以及事件（在大量独立试验中）发生的比例就是这个事件的概率。只要稍加思考，这些都是相当清楚的，而且这些问题不应该引起争论。然而，当人们看到（在其他一些事件中）抽彩和占星的成功时，就会仔细衡量，关于概率，许多人的行为和所谓科学思维所规定的到底有怎样的不同。

抽彩是社会上少数特权阶层欣然接受的一种抽税方式。你买的或许相当便宜的彩票，是你想发财的一个小小的希望。但中头彩的概率是非常低的：它是一种（像你在街上走的时候被一个落下的物体击中那样的）你通常都会忽略的小概率事件。事实上，无论收益是多是少，平均来说，都不能补偿你买彩票所付出的代价，而且概率的计算表明，如果你经常买彩票，那你实际上肯定输钱。让我们看看稍

稍简化了的抽彩，其中得奖的概率是10%，而你赢得的数目是彩票价格的5倍。在大量抽彩之后，你赢的比例接近1/10，而由于你赢得的数目是彩票价格的5倍，所以你总的收益大约是总花费额的一半。因此净收益是负的：你损失了约一半的钱。总之，你买的彩票越多，你损失的钱也就越多，并且对于更加复杂的抽彩，这个结论仍然是正确的，因为所有那些抽彩游戏都是出于组织者的利益，为了能从参与者那儿汲取钱财而设计的。[1]

现在我想谈谈星象，为此，我需要一个概率计算的断言，事实上它只是上一章规则(3)的一个重新表述。这个断言是：

(4) 如果"*A*"和"*B*"是独立的，

那么概率（"*B*"，已知"*A*"发生）＝概率（"*B*"）。

换句话说，已知事件"*A*"发生，根本不能告诉我们任何关于"*B*"的事情，而后一事件的概率仍然等于概率（"*B*"）。在"*A*"和"*B*"独立的假设下，这是正确的。（如果事件"*A*"和"*B*"不是独立的，我们说它们之间有**相关**，或它们相关联。）为感兴趣的读者的利益着想，规则(4)的证明在注释中给出。[2]

现在我们可以讨论星象问题了。它比抽彩更微妙、更有趣，因为我们在这里不能马上看出概率所起的作用。典型地说，星象告诉你，如果你是狮子座的，行星的布局在这周对你有利，你在爱情和博弈方面将会很幸运，但如果你是双鱼座的，无论如何你都要避免乘飞机旅行，老老实实呆在家里，当心身体。天文学家和物理学家会反驳，"*X*是狮子座的"和"*X*将在这周的博弈中中奖"两个事件是独立的。类似地，"*X*是双鱼座的"和"如果*X*在这周乘飞机旅行就会出事"也是独立的。事实上，没有比这些更能说明两个事件之间毫无关系更妙的例子了，即从概率论观点来看，它们是相互独立的。

因此，我们可以运用上述的规则(4)，给出结论：不管 X 是否是狮子座的，X 在博弈中中奖的概率都是一样的；类似地，对于双鱼座和其他任何星座的人来说，乘飞机旅行的危险性都是一样的。总而言之，星象是完全没用的。

那么，事情就这样判决且不允许上诉了吗？还不是的，因为占星术的拥护者恰恰要否认，“X 是狮子座的”和“X 将在这周的博弈中中奖”两个事件是独立的。他们还能给出一份既是杰出的天文学家(astronomers)又是占星术士(astrologers)的人的名单，例如喜帕恰斯(Hipparchus)、托勒玫(Ptolemy)和开普勒(Kepler)。结束这种争论最好的方法是根据实验：有人发现在星象和实在之间有显著的统计相关吗？答案是否定的，且彻底摧毁了占星术。但必须说明，科学家怀疑占星术是出于不同的理由：科学改变了我们对宇宙的认识，使得在古代可以被接受的相关性，现在与我们对宇宙结构和物理规律本质的认识不相容了。占星术和星象能够和古代的科学相吻合，但它们不符合当今的科学。

然而，情况并非如此简单，并且值得认真讨论。我们知道，由于宇宙万物之间存在着力(万有引力)，所以金星、火星、木星和土星都对我们这个古老的行星——地球——施加着某种影响。非常明显，这些影响都很小，因此人们可能以为它们对人类日常生活进程的影响是零。**这是不正确的！** 事实上，某些物理现象，例如气象现象，对扰动显得非常敏感，因而一个很小的诱因在一段时间以后都会产生重大的影响。因此也就有理由相信，金星或其他任何行星的位置会对天气的演化产生不可忽略的影响。事实上，如我们下面将要看到的，证据在于今天下午是否下雨，除了许多其他因素以外，还会依赖于几周前金星万有引力的影响！而且如果我们考虑得仔细会发现，

告诉我们金星对天气有影响的这个观点，还妨碍了我们了解这种影响到底是什么。换句话说，就我们概率论的作用而言，今天下午下雨和金星在这儿或在那儿的事实仍然是两个独立的事件。当然，所有这些都与常识相一致，但还是比我们可能会有的天真想像要微妙得多（见注释中的讨论）。[3]

让我们继续讨论。是否存在这样的情况：恒星和行星对我们的日常事物有着特殊的影响，从而导致了从概率论观点来看有意义的相关性？让我们想像一位有些疯狂的天文学家，他会根据自己对金星的观测，而变成虐待狂去犯罪；这不就是根据某种星象而给出的有意义的相关吗？这种设想并非完全荒诞不经：仔细观测着金星周期的古代玛雅人，也是狂热的人类牺牲者（他们用燧石做成的小刀将受害者的胸膛切开，然后扯出心脏，并将其烧成灰烬）。这意味着人类智力的介入提供了一个可以在先验毫无关系的“事件”之间引入相关性的机制。那么，我们怎么才能确定两个事件之间真的是相互独立的呢？

事实上，现代科学家的优势就是，对于宇宙是如何形成的已经有了相当详细的认识，对它是如何运作的也已有了充分的认识。因此，我们对于何种相关存在，何种相关不存在，已经有了相当准确的意见。例如，我们知道化学反应速度可能相当程度上会受到微量杂质的影响，但不会受到月相的影响。如果有疑问，我们可以检验。智力因素能够导致另外一些出乎意料的相关，但这些相关能够做什么也受到了限制。

“如果你是狮子座的，这周你在爱情和博弈方面将会很幸运。”我们能对行星的位置与 X（天宫图的读者）的个人生活之间的相关说些什么呢？如上所述，如果涉及到智力的因素，这种相关就不是不可能的（玛雅神父或疯狂的天文学家）。而对于其余情况，我们可以

排除此种相关的存在。我们的祖先带着大量的“智力因素”——神仙、魔鬼、小精灵——在宇宙中生活，而科学极大地打击了它们。神仙们是死的……而人的干预并不能改善 X 在“博弈中的运气”。(我们设立了规则，不允许十足的欺骗。)那么，是狮子座的和在本周的博弈中有好运就显然是两个独立的事件，统计研究将能够明确地证实这一点。但 X 在爱情方面的运气又如何呢？这里人的干预就不仅仅只是可能的了，简直就是必然的，因为就是我们这位朋友 X(天宫图的读者)的干预，只要他或她是有些容易轻信的。相信这周“在爱情中有好运”增强了我们的自信心，从而让我们走运，这确实是人的本性。

不可避免的结论是，基于我们视为“暗示”或神谕的偶然巧合，我们常常会做出一些非理性的决定。这种非理性的行为远非总是有害的：避免从梯子下走过是非理性的迷信，但也算是合理的小心。进而，我们将要看到，博弈论告诉我们，随机地做某些决定也是有益的。最后，以为我们有能力理性地决定自己的所有行为根本就是一个错觉。

尽管如此，具备有关概率的正确思想，能够帮助我们避免比较严重的错误。看到那些最负担不起的人们在抽彩和类似的博弈中输掉钱财，非常令人悲伤。而说到星象，我得承认，有一阵子我很喜欢读有关的文章。对出门远行，浪漫偶遇，或惊人遗产等等的预言有某种近乎诗意的东西，而只要你对这些预言别太认真，它们几乎都是无害的。然而，面对某些商业企业根据星象做出雇用决定的事实，人们当然可以感到愤怒。这种“星象”歧视比单纯的愚蠢还要坏，它是彻头彻尾的欺骗。

注　释：

1．事实上，偶尔买一次彩票（或是赌上一小笔），如果你从中获得了适当的消遣的话，也许无可厚非。经济学教科书上讨论了它的逻辑性，以及保险业上的相关问题（为什么即使你知道保险公司从你身上获得了不公平的利润，买保险仍然是有意义的呢）。我们已经指出的是，抱着发财的希望而购买大量的彩票不是一个好主意。

2．在次数为 N 的大量试验中，令事件"A"发生的次数为 $N(A)$，"A"和"B"都发生的次数为 $N(A\text{ 与 }B)$。已知"A"已经发生的情况下，"B"的概率应该近似为

$$\frac{N(A\text{ 与 }B)}{N(A)},$$

它等于

$$\frac{N(A\text{ 与 }B)}{N} \div \frac{N(A)}{N},$$

因此，也就约等于

$$\text{概率}(\text{“}A\text{ 与 }B\text{”}) \div \text{概率}(\text{“}A\text{”})。$$

那么，有理由给出如下定义

$$\text{概率}(\text{“}B\text{”，已知“}A\text{”发生}) = \frac{\text{概率}(\text{“}A\text{ 与 }B\text{”})}{\text{概率}(\text{“}A\text{”})}。$$

（这就是所谓*条件概率*。）如果"A"和"B"是独立的，断言(3)就意味着等式的右边为

$$\frac{\text{概率}(\text{“}A\text{”}) \times \text{概率}(\text{“}B\text{”})}{\text{概率}(\text{“}A\text{”})} = \text{概率}(\text{“}B\text{”}),$$

这就证明了(4)。

3．关于天气会敏感依赖于几周前金星的位置，而统计上却独立于它是怎么回事，让我在这里给出一个简要的学术讨论。令 x 为在一定条件下，即宇宙中，或——更好的说法是——宇宙的理想化中，系统的某个初始状态，它描述在其他事物中，金星的位置和你所在之处的天气。如果初始状态 x 指的是几周前的状况，那么今天下午的状况就是状态 $f^t x$：这里 f^t 称作*时间演化算子*，它是我们系统状态（对应于从几周前到今天下午的时间演化）空间的变换。集合 A 代表我们系统可能的初始条件，但我们不能辨别它们：这就说明了我们不能完全精确知道初始条件。（为了讨论，我们可以假设不能完全精确知道的只是金星的初始位置。）今天下午天气的不同可能性，由集合 $f^t A$ 中所有的点描述。由于对初条件的敏感依赖性现象（将在后面的章节讨论），$f^t A$ 不再是一个小的集合，事实上它将能够覆盖天气所有不同的可能性。现在，令 B 是描述今天下午下雨这一状态的集合。$f^t A$ 的部分会落在 B 中，部分会在它之外，因此，几周前金星的影响也就妨碍了我们预测今天下午是否下雨。（你所在的地方）今天下午有雨，并且和我们所了解的几周前（金星）的状况相一致的宇宙状态是交集 $(f^t A) \cap B$ 中的点。我们能就这个交集说些什么呢？

为了能够展开讨论，我们利用这样一个事实：对于许多时间演化，都存在一个不随时间演化而改变的*自然概率测度* m，用以描述各种事件的概率。例如，$m(f^t A) = m(A)$ 就是与我们的初条件相关联的事件"A"的概率。进而，$m((f^t A) \cap B)$ 就是几周前事件"A"和今天下午事件"B"都发生的概率。在许多情况下，对于 t 很大的时候，都会有

$$m((f^t A) \cap B) \approx m(A) \times m(B)。$$

这一所谓*混合*的特性表示集合 $f^t A$ 是如此卷绕，以至于它在 B 中的部分与 B 的大小[用 $m(B)$ 度量]成正比。

如果从概率的角度解释上述混合特性，我们看到它给出的结果与今天下午下雨和几周前金星的位置之间（在统计上）相互独立的假设完全一致。[$m(A) = 0$ 的现象在专业上是一个次要的困难，取个适当的极限就可以解决。]

上述统计独立性的理由，当然不能令一个要求证明的数学家满意。而我们根本不能给出证明：这问题简直太难了。如果你是一位物理学家，就不会介意没有数学证明，但你会要求一些别的东西。首先，你会要求找到在我们这个问题中初条件敏感依赖性的证据，并且想知道“几周”到底是几周(这将在下面的章节中讨论)。然后，你会想精确地定义金星的位置的含义(如果你不太仔细，金星的位置与一年中的时间，以及由此而生的季节性天气相关联)。你还要考察混合的问题。由于直接攻克这个问题非常困难，你会尝试假设下雨和金星的位置之间的统计独立性，看看能出什么差错。可能出现的差错，就是依据对金星的观测修改了天气的智力因素。但就目前的技术而言，这不太可能。最后，如果这件事儿足够有趣，你会着手于关于天气和金星位置之间独立性的一系列观测和统计检验。

我们的讨论至少还有一个问题尚待解决：我们所谓的智力因素指的是什么呢？在这一点上，我们能说的只是智力因素引人了在其他情况下你丝毫预料不到的相关性。如果你想一下，这并不是智能的一个有害的特征。

5. 经典决定论

时间流逝，是我们理解这个世界的一个基本方面。我们已经看到，机遇是我们理解世界的另一个基本方面。这两个方面如何相互吻合呢？掷硬币之前，我估计出现得到正面或反面的概率都是50%。然后，我掷出硬币，结果(譬如说)是正面。那么硬币在什么时刻决定了正面朝上？我们已经向自己提出过这个问题，但是回答它并不太容易：在这儿我们面临着用几个不同的物理理论描述的那些“实在片段”中的一个，而且这些不同理论之间的联系是有点儿生硬的。我们前面讨论了描述机遇的理论——概率的物理理论。对于时间的描述，则更为棘手一些，因为至少有两个不同的理论任我们选用：经典力学和量子力学。

我们暂时忘记掷硬币的问题，来讨论力学。力学——无论经典力学还是量子力学——的宏愿就是要告诉我们宇宙是如何随时间演化的。因此，力学必须描述行星围绕太阳的运动，以及电子围绕原子核的运动。而尽管对于大的物体，经典理论给出了漂亮的结果，但

在原子水平上它就变得不合适了，必须用量子理论代替。所以，量子力学比经典力学更加正确，但用起它来却也更加微妙和困难。事实上，无论经典的还是量子的理论都不适用于接近光速运动的物体；在这种情况下，我们必须使用爱因斯坦(Einstein)的相对论(狭义相对论；或者如果我们想描述引力的话，就用广义相对论)。

但是，你也许会提醒我，为什么只停留在经典力学或量子力学上？难道我们不是更想用能够将所有量子效应和相对论性效应都考虑进去的*完美*力学吗？毕竟，令我们感兴趣的是和它的真实存在完全一样的宇宙，而不是这种或那种经典的或量子的理想化。让我们仔细考虑一下这个重要的问题。首先，不得不面对现实：我们还没有*完美的力学*(true mechanics)。在我写这本书的时候，我们还没有一个能够与我们所知的全部物理世界(相对性、量子、基本粒子属性，以及万有引力)相一致的统一理论。每个物理学家都希望看到有这样一个统一理论可供我们使用，而这也可能有朝一日就会实现，但现在还仅仅是一个希望。即使这些理论中的一个已经被认为将来会成为我们所希望的那一个，但现在它还不能在我们计算基本粒子的质量以及它们的相互作用等方面的工作上*起到作用*。我们目前所能尽力做的，就是使用一个有些近似的力学。本章，我们将采用经典力学。以后我们将看到量子力学乃基于有点儿不太直观的物理概念。量子力学与机遇的关系也就因此更难以分析。一切似乎都表明完美力学的物理概念将很难用直觉去把握。因此，用经典力学——以其清晰的物理概念——去研究机遇和时间之间的关系也就很合理了。

如上所述，力学的宏愿是要告诉我们宇宙是如何随时间演化的。此外，力学还必须描述行星围绕太阳的运动，描述由火箭发射的空间运载工具的轨道，描述黏性流体的流动。总之，力学必须描述物理

系统的时间演化(time evolution)。牛顿是第一个真正了解该如何做这件事的人。让我们用比牛顿所用的更为现代的语言来说明，在某个时刻物理系统的状态是由系统中物质所集中的那些点的位置和速度给出的。因此，我们必须给出行星的位置和速度，给出我们感兴趣的空间运载工具的位置和速度，给出组成流动黏性流体的所有点的位置和速度。(在最后一个例子中有无穷多个点，因此要考虑无穷多个位置和速度。)

按照牛顿力学，如果知道了一个物理系统现在某个给定时刻——让我们称之为初始时刻——的状态(位置和速度)，我们就知道了它在其他任何时刻的状态。这个认识是如何获得的呢？这里需要一个新的概念，即作用于系统的力。对于一个给定的系统，每一个瞬间的力是由这个瞬间系统的状态决定的。例如，两个天体间的引力和这两个天体间距离的平方成反比。现在牛顿告诉我们，系统状态随时间的变化和作用于这个系统的力有关。(这种关系由牛顿方程加以表达。)[1]已知一个系统的初始状态，我们就可以由此确定系统状态是如何随时间变化，从而就如我们宣称的那样，确定了其他任何时刻系统的状态。

我们刚刚用几句话展现了普适思想的那个伟大的里程碑——现在也被称为经典力学的牛顿力学。对经典力学的认真研究，需要用到在这里我们无法给出的数学工具。但我们可以对牛顿理论做一些有趣的评述，而无需涉及详细的数学讨论。首先让我们注意，牛顿的思想使他的许多同时代人大为震惊，特别是笛卡儿(René Descartes)，他就不能接受在天体间“远程力”的概念。他觉得这个思想是荒谬的、非理性的。根据牛顿的观点，物理学就是将数学理论粘接在实在片段之上，以这个方式再现观测事实。但对笛卡儿来

说，这个方法太不严格了。他希望有一个只存在相互接触的力，像一个齿轮和另一个齿轮之间的那样，而没有远程力的机械论(mechanistic)解释。物理学的发展已经说明牛顿(而不是笛卡儿)是正确的，试想后者会如何看待不能同时确定一个粒子的位置和速度的量子力学呢？

回到牛顿力学，我们发现它给出的是完全确定的世界图景：如果我们知道宇宙在某个(任意选择的)初始时刻的状态，我们就应该能够确定它在其他任何时刻的状态。拉普拉斯(Laplace)(如果你喜欢，可以称 Pierre Simon, Marquis de Laplace)曾经给出过一段关于决定论的优美而著名的表述：

> 一种智慧，如果它能够知道，使得自然界生机勃勃的所有的力，以及构成自然的所有元素各自的状态，在某个给定瞬时的全部情况，进而，如果它足够庞大以至于可以分析所有这些数据，那么，它将可以用同一个公式囊括宇宙中最庞大物体和最微小原子的运动；对它来说，没有什么事情是不确定的，无论将来还是过去都将呈现在它眼中。已经能够造就完美天文学的人类的头脑，朦胧地显现了这种智慧的样子。[2]

拉普拉斯的这段话几乎有种神学的味道，并且肯定会引出各种疑问。决定论和人的自由意志能相容吗？它和机遇能相容吗？我们先讨论机遇，再简要考察有关自由意志的繁杂问题。

乍一看，拉普拉斯的决定论没有给机遇留下任何余地。如果我向空中抛出一枚硬币，经典力学的定律就确定无疑地决定了它落下来的方式以及落下后的结果。由于机遇和概率实际上在我们

对自然界的认识中起到了非常重要的作用，所以我们也许就想驳倒决定论。然而实际上，我将要指出，使机遇与决定论对峙而形成的困境在很大程度上是一个假问题（false problem）。在这里，让我试着对如何避免这个问题给出一些简要说明，而更为详细的研究将留待后面的章节讨论。

首先要注意的是在机遇与决定论之间不存在什么逻辑不相容性。实质上，系统在初始时刻的状态并非精确给定的，而是随机的（random）。用更加专业的话来说就是，我们系统的初始状态具有某种概率分布。如果情况是这样，那么系统在其他任何时刻的状态也都将是随机的，它的随机性（randomness）将由新的概率分布来描述，而这个概率分布能够通过运用力学定律被确定地推演出来。实际上，系统在初始时刻的状态绝不可能被完全精确地获知：我们不得不允许在初始状态中有那么一点儿的随机性。我们将会看到，初始的那么一点儿随机性会在后来给出许多的随机性（或许多的不确定性）。所以我们看到，实际上决定论并不排斥机遇。所有我们能说的就是，我们可以在完全不提及机遇或随机性的情况下提出经典力学——如果我们是如此希望提出它的话。后面我们将看到，对于量子力学这个结论就不成立了。物理实在的两个理想化也许就是因此而在概念上完全不同了，尽管它们对于一大类现象的预测简直完全一样。

机遇和决定论之间的关系已经是许多讨论的对象，最近更成为托姆（René Thom）和普利高津（Ilya Prigogine）之间[3]激烈论战的主题。这两位先生的哲学思想确实存在着激烈冲突。但有趣的是，当人们提及可观测现象的细节时，在严肃的科学家之间就不再有什么可争执的了。（如果还有对立的话，那些对立也许就更有趣了。）让我们注

意托姆的主张，他认为由于科学的任务是要阐明规律，所以对于宇宙时间演化的科学研究就必定要给出一个确定性的表述。不过，它并不一定就是拉普拉斯决定论。我们可能可以非常成功地获取一些决定着某些概率分布的确定性定律；但机遇和随机性决不是如此容易回避的！然而，论及机遇与决定论对峙的困境，以及相关的自由意志问题，托姆的意见还是非常重要的。事实上，托姆告诉我们的是，这个问题不能通过对这一个或那一个力学的选择来解决，因为本质上，力学就是确定性的。

自由意志(free will)是一个伤脑筋的问题，但不能留着它不做讨论。在这里，让我简要地给出量子力学的奠基人之一薛定谔(Erwin Schrödinger)从事的学科所维护的一个观点。[4]量子力学留给机遇的作用唤起了人们的希望，正如薛定谔所指出的，这个力学，比起拉普拉斯决定论来，将能够更好地与我们关于自由意志的思想相吻合。但是，他说这种希望只是一个错觉。薛定谔首先注意到，根本没有起源于其他人自由意志的真正问题：我们能够接受所有关于**他们**的决定的一个完全确定的解释。引起困难的原因在于，决定论和**我们的**自由意志之间的表观矛盾。**数个可能性**同时向我们开放，而我们从中选择一个以确保自己的**责任**，这个事实深刻地显现了上述矛盾的特征。将机遇引入物理定律完全不能帮助我们解决这个矛盾。实际上，我们能说，我们是用做出随机选择来确保自己的责任的吗？事实上，我们的选择自由常常都是虚幻的。薛定谔举例，设想你和一些重要但讨厌的人一起出席一个正式的社交宴会。(很显然，他经常受到这种款待，比他应该得到的要多。)他说，你可以考虑跳上桌子，然后开始跳舞，打破玻璃杯和盘子，但是你绝不会那么做，你也就不能说你运用了自己的自由意志。在别的一些情况下，选择确实

被做出了，但也许是负责而痛苦的选择；这样的选择当然不具有随意做出的特点。总之，在理解自由意志方面，机遇帮不了我们，而无论是在自由意志和经典力学之间，还是在自由意志和量子力学之间，薛定谔都没有看到有矛盾存在。

和自由意志有关的是古老的神学问题，得救预定论(predestination)：是否上帝已经事先决定，哪些灵魂会被拯救，哪些会被打入地狱？这是基督教的重大问题：在这里，和自由意志相对立的不是决定论，而是上帝的全知全能。拒绝得救预定论似乎限制了神的力量，但接受它又似乎使精神努力变得徒劳。得救预定论教条受到奥古斯丁(Saint Augustine，354～430)、阿奎那(Saint Thomas Aquinas，1225～1274)、新教改革者加尔文(Jean Calvin，1509～1564)以及17世纪詹森教派信徒们(Jansenists)的捍卫。而官方天主教会的态度是谨慎的，总是不愿承认立场强硬的得救预定论学说。如今，曾经一度对智力生活是如此重要的有关得救预定论的争论，正渐渐成为过去。时间正把成千上万页用中世纪拉丁文写成的神学辩论埋葬进湮没的沙砾。这些古老的问题尚未被解决，但，渐渐地，它们越来越没有意义，它们被遗忘，它们消失了……

我个人对于自由意志的看法是与可计算性(computability)问题联系在一起的。关于这一点，我们将在下面的章节中讨论。为了突出问题，我想谈谈有些人(预言者)的悖论(paradox)：他们用物理定律的决定论预言未来，然后再用自由意志反驳自己的预言。这个悖论在预言者能够给出精确得令人难以置信的预言的科幻小说中显得尤其迫切。[想想赫伯特(Frank Herbert)的《沙丘》和阿西莫夫(Isaac Asimov)的《基地》吧。]我们如何处理这个悖论？我们要么抛弃决定论，要么抛弃自由意志，但还有第三种可能：我们可以怀疑任何一

个能够预言得如此之好以至于产生悖论的预言者的能力。注意，如果一个预言者以破坏对某个确定系统的预测来制造悖论，那么这个预言者也必定是所涉及系统的一部分。这就意味着这个系统可能相当复杂。所以，对该系统未来的精确预言很可能需要庞大的计算能力，这个任务很轻易地就超出了我们这位预言者的能力所及。以上讨论只是对于一个没有经过精确表述的问题的有点儿不太严格的论证，但我认为它还是确认了为什么我们不能控制未来的原因（或原因之一）。这种情况类似于哥德尔不完全性定理。在那儿，同样是对一个悖论的思索导致了如下证明：某些断言的真假不可被判定，因为要做出一个这样的判定所需的时间将长得令我们一筹莫展。简言之，令我们的自由意志成为一个有意义概念的，正是这个宇宙的复杂性，或更确切地说，是我们自身的复杂性。

注　释：

1．*牛顿方程*：考虑质量为 $m_1, \ldots, m_N$（正数），位置为 $x_1, \ldots, x_N$（三维空间向量）的 N 个点；则牛顿方程为

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} x_i = F_i \quad (i = 1, \ldots, N),$$

其中，F_i 是第 i 个质点所受到的外力（一个三维向量）。我们只单独提到了一个牛顿方程，但实际上有 $3N$ 个，因为在每个位置上都有 3 个分量。*万有引力*写为

$$F_i = \gamma \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3},$$

其中 γ 是*万有引力常量*。这种力是用于研究诸如行星围绕太阳旋转这样的运动的。如果已知在某个初始时刻的位置 x_i 和速度 dx_i/dt，那么原则上说，从牛顿方程推导出它们在另一个时刻的位置和速度是可能的。我用了*原则上*这个词，是因为对于所有初条件来说，万有引力的牛顿方程并不保证其解的存在性和唯一性。并且，当 N 等于 3 或是更大的时候，方程就得不到具有显式解析形式的解，对于它们的研究变得非常敏感和棘手。

2．P. S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabililités* (Paris: Courcier, 1814).

3．R. Thom, "Halte au hasard, silence au bruit (, mort aux parasites)"; Edgar Morin, "Au-delà du déterminisme: Le dialogue de l'ordre et du désordre", Ilya Prigogine, "Loi, histoire ... et désertion." 这些文章 1980 年发表于法文杂志 *Le Débat* (no. 3 and no. 6)，并且托姆在印好发行的版本中漏掉了 "mort aux parasites"。这些文章连同其

他一些文章，如今再版于合集 *La querelle du déterminisme*：*Philosophie de la science d'aujourd'hui*（Paris：Gallimard，1990）中。

4. E. Schrödinger，"Indeterminism and free will，" *Nature*，July 4，1936，pp. 13～14. 这篇论文重印于 E. Schrödinger，*Gesammelte Abhandlungen*（Vienna：Vieweg，1984），vol. 4，pp. 364～365。

6. 博　　弈

一般的骰子都有完全相同的六个面，分别标明从 1 到 6 六个数字。为了产生随机数字，若能找到完全相同的十个面分别标明了从 0 到 9 十个数字的骰子就方便了。实际上，并不存在有十个面的正多面体，但有 20 个面的（二十面体），我们只要在相对的两个面上写上相同的数字就可以了。投掷一次这样的二十面体骰子，可以产生从 0 到 9 中的一个数字。而每个数字出现的概率都相同，均是 1/10。而且，我们可以使相继的投掷都是相互独立的，从而以这种方式得到一系列独立的数字。这种掷骰子游戏的概率理论使我们可以去计算前几章所讨论的各种概率。例如，三次相继投掷的结果相加为 2 的概率是 6/1000。

所有这些并不非常令人激动。但你也许会为这些打印出的“随机数”（random numbers），即上述随机数字（random digits），所组成的序列感到惊奇，像 721377385032733562180647 . . . 。拥有这样的一个序列似乎完全没什么用。但在这一章中，我将到博弈论（game theory）中去

做一次小小的游览，并证明与上述恰恰相反的观点。

这是一个你知道的游戏。我(在背后)把一个弹子握在左手或者右手，然后伸出拳头给你看，你要猜出弹子在我的哪只拳头中。我们进行许多次这个游戏，记下结果。最后计算出你猜对了多少次，猜错了多少次，并用钱、啤酒或其他什么东西结算你输赢的差额。假设我们俩都想赢，而且两人都绝顶聪明。如果我总是把弹子放在同一只手中或只是简单地交替变化，你很快就会注意到并赢了我。事实上，任何我试图设计的这种机械的策略，最终都会被你看穿。是否这就是说你必然会赢了？不是的！如果我以1/2的概率随机地把弹子放在任何一只手中，并且使相继的选择之间相互独立，那么你大约会猜对一半儿，平均来说，你既不赢也不输。

你会猜对一半儿(即概率是1/2)是很显然的。只要说明我手的选择和你的猜测是**独立事件**，就可以令人信服地证明这一点。注意，对我来说，“相当随机地”把弹子放在左手或右手是不够好的。对一只手的任何偏好，或在相继选择间的任何关联，都将对我不利，从长远来看，你都将会赢了我。

当然，我可能很聪明，诱使你做出错误的选择，结果你输了。但你不难用随机的猜测来对付我。

现在，我如何以1/2的概率做出左右手的独立的相继选择呢？嗯，如果有一个随机数组成的序列，我可以设定，偶数对应右手，奇数对应左手，这就得到了解决问题的诀窍。然而，要记住一个基本的事情：我手的选择和你的猜测应该是独立事件。因此，你应该对我的随机数序列一无所知，而我也应该不给你任何有关我把弹子放在哪只手里的暗示。特别是，我不应该发送任何可能对你的猜测有用的心灵感应的消息。对于这最后一点，(恰恰就是我们所讨论的这种

游戏的)有关实验已经做了，它们明确地显示不存在任何心灵感应(telepathy)。

所以，私人拥有的随机数字序列终究是一份有用的财产。无可否认，如何获得一个随机数字序列的问题仍需进一步的讨论，不过我们会在以后对它进行充分论述。目前，还是让我们再多考虑一下博弈的问题。

博弈过程中随机行为(random behavior)的有用性，对于哲学和实用来说，都是一个重要的观察结果[基本上归功于法国人博雷尔(Emile Borel)和匈牙利-美国人冯·诺伊曼(John von Neumann)]。当然，如果你和某人合作，通常还是让行动有规律可循会比较好一些。但在竞争的情况下，最佳策略常常都涉及随机的不可预测行为(unpredictable behavior)。

让我们考虑这样一种“游戏”：我有从各种行动中选择其一的权力，而你在不知道我会如何行动的情况下，决定你自己的行动，这个游戏的结果(即，我付给你多少钱，或是你付给我多少钱)由这两个行动决定。例如，我的行动是选择一只手放进一个弹子，而你的行动是猜测弹子在哪只手中。如果你猜对了，我给你1美元，如果你猜错了，你给我些什么(1美元，或其他什么东西)。

另一个游戏将使我到战场上去，躲进一个掩体，而你则开着一架小飞机在天空盘旋，扔下炸弹，试图命中我。对于我来说，一个自然的想法就是选择附近最好的掩体，躲藏进去。但你也会很自然地想到，去找出最好的掩体，然后炸毁它……所以我若躲藏在第二好的掩体中不是就更好了吗？如果我们都非常聪明，我们就都会去用概率策略(probabilistic strategies)。我将计算出躲藏在各个可能的掩体中的概率，即总体上最能让我幸存下来的机遇值，然后抛一枚硬币

(或用一张随机数的列表)去决定躲在哪儿。类似地，你也想把炸弹扔在总体上让你最有可能命中我的地方。这听起来也许有点儿疯狂，但如果我们俩都很聪明，且都依“理性”行事的话，这将是我们应该做的。当然，如果我不能保持我行动的隐蔽性，你将能够做得更好，而且你应该千方百计地防止我洞悉你的轰炸意图。

在日常生活中，你会发现你的老板、你的爱人，或你的政府常常试图操纵你。他们推荐给你这样一种做选择的“游戏”，它的两个选项中的一个显然是更可取的。刚刚选了那个合理的选择，你就面临着新的一轮游戏了。很快你就会发现，你的那个合理选择带来了一些你从来也不想要的东西：你中了圈套。为了避免这种情况，记住略微离奇的行动也许是最佳策略。你做出一些次最优选择(suboptimal choices)而失去的东西，将因为保持着更大的自由而得到补偿。

当然，这种思想不仅仅只是离奇地行动而已，还要按照特定的概率策略去做。这种概率策略恰恰涉及到一些我们现在想要计算的概率。这里有一个由下面这个支付表(table of *payoffs*)决定的特定游戏。

我的选择 \ 你的选择	1	2	3	4
1	0	1	3	1
2	−1	10	4	2
3	7	−2	3	7

我有几种选择(比如说3种)，你也有几种(比如4种)，我们相互独立地做出各自的选择。(这些选择类似于隐蔽在某个确定的掩体里，或在一种纸牌游戏中打出某一张确定的牌。)当我们两人都做出选择以后，就按上表支付一定的报酬。例如，我选2，你选4，你就

得付我 2 美元。 如果我选 3，你选 2，那么报酬为负 2 美元，即我付给你 2 美元。

假设我以某种概率做出我的 3 种选择，你也以某种概率做出你的 4 种选择。 那么所有这些概率就决定了一个确定的平均支付(或期望支付)，当然你将尽力使这个平均支付最小，而我将努力使它最大。1928 年，冯·诺伊曼证明了，你最小时我最大和我最大时你最小是一样的(这就是著名的*极小极大定理*)。[1]这就意味着，因为我们两人都是非常聪明的对局者，所以我们恰恰在怎样才能使结果不一致的方面达成一致。

我将不再深入计算你我的选择的概率以及平均支付的详细数学问题。 这个问题属于所谓*线性规划*(linear programming)的一种普通的问题类型，且当可供你我选择的选项都很少的时候，这个问题并不太困难。 一旦支付表变得庞大，问题就变得更困难了。 我们将在以后评述线性规划问题如何之难。

如上所述，博弈论是个美妙的数学理论，它显示了拥有一个产生随机数字的神秘来源是一件多么有用的事情。 但或许我们生活在一个没有任何随机的确定性宇宙中。 少了上帝以私人专线向我们发送随机数字，我们该怎么办? 我们也许可以转动骰子或投掷硬币，并在某些操作上被定义的条件下，断言这样就产生了随机选择。 但在某些情况下，我们将不得不去查明这种随机性是如何产生的。 这是件有点儿复杂的事情，我们将用下面几章来阐明它。

注　释:

1. *极小极大定理*。 我们考虑有限零和两人对策。 有这样两个局中人，A 和 B。 A 可以在 M 个选择(分别标明 1，...，M)中任选其一，而 B 有 N 个选择(分别标明 1，...，

N)。对策称为有限，是指 M 和 N 是有限的。局中人 A 的选择 i 和局中人 B 的选择 j 使局中人 A 得到 K_{ij}，局中人 B 得到 $-K_{ij}$。对策是零和的，指一个局中人所得数量 $|K_{ij}|$ 就是另一个局中人所失。现在假设局中人 A 挑选他的选择的概率是 $p_1, \ldots, p_M$，局中人 B，她的选择概率是 $q_1, \ldots, q_N$。那么，局中人 A 的平均支付为

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} K_{ij}\,p_i\,q_j,$$

局中人 B 的所得即是上式的负值。对于局中人 B 所最不可能选择的 q 们，局中人 A 将努力使他的平均支付尽可能地大。这就给出

$$\min_{(q_1,\ldots,q_N)}\ \max_{(p_1,\ldots,p_M)} \sum_i \sum_j K_{ij}\,p_i\,q_j。\tag{1}$$

局中人 B 的相应所得为

$$\begin{aligned}&\min_{(p_1,\ldots,p_M)}\ \max_{(q_1,\ldots,q_N)} \sum_i \sum_j (-K_{ij})\,p_i\,q_j\\ &= -\max_{(p_1,\ldots,p_M)}\ \min_{(q_1,\ldots,q_N)} \sum_i \sum_j K_{ij}\,p_i\,q_j。\end{aligned}\tag{2}$$

极小极大定理指出(1)式是(2)式的负值，即

$$\min\max \sum_i \sum_j K_{ij}\,p_i\,q_j = \max\min \sum_i \sum_j K_{ij}\,p_i\,q_j,\tag{3}$$

其中，取极小和极大的条件是 $p_1, \ldots, p_M,\ q_1, \ldots, q_N \geqslant 0$ 且 $\sum p_i = \sum q_j = 1$。

注意：若局中人 A 和 B 没有用这些概率策略，而是坚持以纯粹的策略取代，那他们之间就没有极小极大定理，因为一般情况下

$$\min_j \max_i K_{ij} \neq \max_i \min_j K_{ij}。$$

然而，这种情况下，局中人的一方就会发现转用概率策略有利可图。

极小极大定理的得出，应归功于冯·诺伊曼(J. v. Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*[Princeton: Princeton University Press, 1944])。

我们如何得到给局中人 A 和 B 提供了最优策略的 p_i 和 q_j，以及(3)式中的 K 值？这些量都由以下线性条件决定：

$$\begin{aligned}&p_i \geqslant 0,\ \sum_j K_{ij}\,q_j \leqslant K \quad (i = 1, \ldots, M)\\ &q_j \geqslant 0,\ \sum_i K_{ij}\,q_i \leqslant K \quad (j = 1, \ldots, N)\\ &\sum_i p_i = \sum_j q_j = 1。\end{aligned}$$

求解这一系列线性等式和不等式，是一个线性规划问题。

对于正文中给出的那个支付表的特定情况，可以算出 $p_1 = 0,\ p_2 = 0.45,\ p_3 = 0.55,\ q_1 = 0.6,\ q_2 = 0.4,\ q_3 = q_4 = 0,\ K = 3.4$。

7. 初条件敏感依赖性

你一定还记得发明了国际象棋游戏的那个智者的故事。作为奖赏，他要求国王在棋盘的第一个方格中放1颗谷粒，在第二个方格中放2颗，在第三个方格中放4颗……依此类推，每个方格中的谷粒都是前一个的两倍。一开始国王认为这是一个非常合适的奖赏，直到后来他发现需要的谷量是如此巨大，以至于不仅他，世界上任何一个国王都无法提供得出。这是很容易验证的：如果你倍增10次，下一次就与1024相乘，如果你倍增20次，下一次就乘以比100万还大的数，依此类推。

一个量在一定时间以后翻倍，然后又在同样的时间间隔后再翻倍，这样一次又一次反复进行，这就被称为**指数增长**。正像我们刚刚看到的，它马上就变得非常巨大。指数增长也称为**常数率增长**：如果以5%的常数率在银行里存钱，只要你可以忽略税收和通货膨胀，大约14年后这笔存款就是原来的两倍了。这种增长类型是很平常的，而且在现实世界中普遍存在，……但从来都不能维持很长的时间。

当你试着让一枝铅笔的笔尖立着使它保持平衡时，我们可以用指数增长的思想来理解所发生的事情。除非你作弊，否则不会成功。这是因为你永远不能使这枝铅笔恰恰处于平衡状态，任何偏离都将使铅笔倒向这一边或那一边。如果人们用经典力学定律来研究铅笔倒下的问题（我们将不这么做），他们会发现，铅笔以**指数速度**迅速地倒下（这是个近似，至少在刚刚开始倒下的时候是这样的）。因此，铅笔对平衡位置的偏离在某个时间间隔内将增长一倍，相同一个时间间隔内再增长一倍，依此类推，很快铅笔就平躺在桌子上了。

我们对铅笔的讨论给出了一个**对初条件的敏感依赖性**（sensitive dependence on initial condition）的例子。这意味着，在0时刻（即铅笔的初始位置或初始速度）系统状态的一个微小变化，将导致后来随时间指数增长的变化。一个很小的原因（small cause）（把铅笔向右或向左轻轻推一推），将引起很大的结果（big effect）。似乎这种情况要发生（小原因产生大结果），人们在初始时刻需要有一种特殊的状态，像铅笔在笔尖上的不稳定平衡状态。反之亦成立：**许多物理系统在任意初条件下都呈现对初条件的敏感依赖性**。这是有点儿违反直觉的，数学家和物理学家们为了搞清楚这究竟是怎么回事颇费了一番工夫。

我们看另外一个例子——有圆形或凸起障碍物的台球游戏。像物理学家常做的那样，我们对这个系统进行一些理想化：我们不考虑“自旋”，忽略摩擦，并且假设碰撞是**弹性的**。我们感兴趣的是台球中心的运动，只要没有碰撞，它们就是匀速直线运动。当台球与障碍物碰撞时，我们代以考虑台球中心被一个较大的障碍物（障碍物一定要比台球的半径大——见图7.1）反弹。台球中心被一个障碍物反弹回来的轨迹，和光线被镜子反射的路径完全相同（这就是所谓弹

性碰撞的含义)。 现在，有了这个和镜子的类比，我们就处于有利地位，可以来讨论台球问题初条件的变化了。

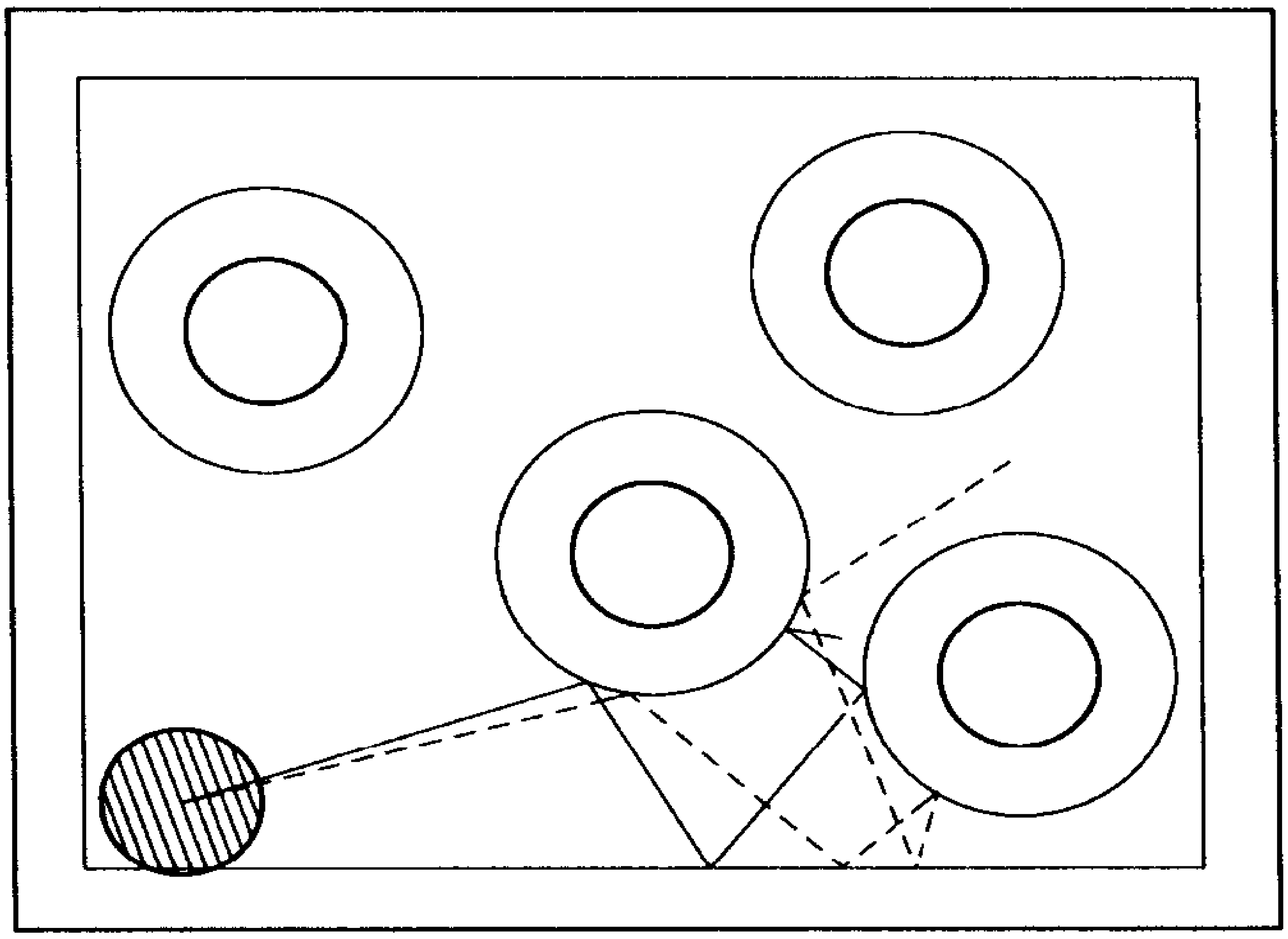


图 7.1　一个有凸起障碍物的台球桌。 台球从左下角开始运动，图中(用实线)标出了台球中心的运动轨迹。 一个虚拟台球以稍微不同的方向(虚线)出发。 几次碰撞以后，两条轨迹彼此不再有什么关系了。

由此，我们假设在同一张台球桌上有一个**真实的**和一个**虚拟的**球。 我们同时击打它们，使它们具有相同的速度，但运动方向稍有不同。 因此真实球和虚拟球的轨迹之间就有了某个角度——我们夸大地称这个角为 α——而这两个球之间距离随时间成正比增长。 注意，这种随时间成正比的增长不是我们早先讨论过的那种距离的爆发性指数增长。 如果 1 秒钟以后真实球和虚拟球的中心之间相距 1 微米(千分之一毫米)，那么 20 秒钟后，它们也仅仅相距 20 微米(仍然是个很小的量)。

稍稍想一下就知道，在台球桌直边上的反弹不会改变台球的状况：反弹后轨迹间的夹角仍然是同一个角 α，真实球和虚拟球间的距离仍保持随时间成正比增长。 请记住，台球在台球桌边上的反弹

和光在镜面上的反射服从相同的定律：只要镜子是平直的，我们就别期望有任何非常有趣的事情发生。

但是我们说过在台球桌上有圆形障碍物，它们相当于一些凸面镜。如果你在凸面镜里看自己，你知道它的效果和平面镜不同。有什么不同，在光学教程中会有讨论，基本情况如下所述：如果你投一束有夹角 α 的光到凸面镜上，反射光束会有一个比 α 大的不同的夹角——我们令其为 α'。为了使事情简化，我们假设 α' 是 α 的两倍。（我们下面将要看到，这是有些过于简化。）

让我们回到带有圆形障碍物的台球桌，回到我们一个真实、一个虚拟的两个台球上。最初，两个球之间轨迹的夹角是 α，且当它们碰到台球桌的直边时，反射没有改变这个角度。然而，两球碰到一个圆形障碍物之后，它们的轨迹就散开了，形成了是最初夹角 α 两倍的 α'。又一次和圆形障碍物的碰撞，将使轨迹间的夹角变为 4α。10 次碰撞以后，轨迹间的夹角就是 1024α 了，依此类推。如果我们每秒碰撞一次，那么，真实球和虚拟球轨迹之间的夹角就随时间指数地增长。实际上，从数学上很容易说明，只要两球间的距离还是很小的量，距离就也随时间指数地增长[1]：由此，我们就得到了**对初条件的敏感依赖性**。

现在，假设经过安排可以使真实球和虚拟球中心间的距离每秒增长一倍，那么，10 秒钟以后，原来 1 微米的距离就增加到 1024 微米——大约 1 毫米。20（或 30）秒以后，两球间的距离将超过 1 米（或 1 千米）！但是，这是些毫无意义的废话：台球桌并没有那么大。产生这些废话的原因是，我们过于简化的模型假设经过圆形障碍物的反弹，这两个台球轨迹间的夹角要增长一倍，但仍保持是个小量。不过，只要这两条轨迹非常靠近，这个假设就是近似正确的。但随后

它就失效了："真实"轨迹打中了一个障碍物，而"虚拟"轨迹完全碰不着它(或反之亦然)。

现在，让我归纳一下我们关于一个台球在有圆形障碍物的台球桌上运动的结果。如果同时观察一个"真实"球和一个"虚拟"球在初条件稍稍有些不同的情况下的运动，我们会看到，在一段时间里，这两个球的运动通常随时间指数地分离，然后一个球打中了一个障碍物，而另一个球没打中，从此这两个球的运动就不再有什么关系了。诚实起见，我必须说明"虚拟"球有一些例外的初条件，它们可以使这两个球的运动不会按指数分离：例如，虚拟球在真实球后面1毫米的地方以完全相同的轨迹跟随着它。无论如何，这都是一种例外，通常这两条轨迹是要如断言的那样分离的。

在离开这个话题之前，让我强调一下，我上面所展示的仅仅是关于台球的一个*启发式*讨论。这意味着，我让事情看起来可信，但没有给出证明。重要的是，人们要能依着同样的思路，对有着圆形障碍物的台球，完成完全严格的数学分析。这个分析[归功于俄罗斯数学家西奈(Yakov G. Sinai),[2]后来其他许多人追随了他]确实非常困难。一般而言，具初条件敏感依赖性系统的数学讨论都是不容易的，这就解释了为什么物理学家直到相当近才开始对这种系统感兴趣。

注　释：

1．真实小球和虚拟小球之间距离的增长(＝距离对时间的导数)与它们轨迹间的夹角成正比。因此，两个小球之间的距离以指数积分为推算量。这里再一次出现了(取决于一个附加常数的)指数：

$$\int_0^t Ae^{\alpha s}ds = \frac{A}{\alpha}(e^{\alpha s} - 1)。$$

当然，每秒钟一次撞击的假设是一个近似，即便如此，角度的增长也只是大约为指数的。但我们论点的唯一严重的困难是，它只适用于小球间距很小的情况。

2. Ya. G. Sinai, "Dynamical systems with elastic reflections," *Uspekhi Mat. Nauk* 25, no. 2 (1970): 137～192;英译本：*Russian Math. Surveys* 25, no. 2 (1970): 137～189，这是原始论文（十分专门），之后就相继出现了其他许多作者的很多篇别的文章。

8. 阿达马、迪昂和庞加莱

我希望在上一章中我已经令你相信台球遇到凸起障碍物时会有奇怪的事情发生。设想我对初条件作一些小小的修改，用一个稍微不同的“虚拟”球的位置和方向代替“真实”球的位置和射出方向。那么，最初彼此非常接近的“真实”和“虚拟”球的两条轨迹，后来会愈来愈迅速地分离，直到它们之间变得再也没有什么关系。这就是我们所谓的对初条件的敏感依赖性。概念上说，这是一个非常重要的发现。我们台球的运动由初条件精确地决定，但在预测其轨迹方面仍受到根本的限制。我们有决定论，但也有长期的不可预测性。这是因为我们对初条件的了解带有一定的不精确性：我们不能把“真实”初条件与许多非常接近它的“假想”初条件区分开来。因此，我们就不知道哪一种可能的预测是正确的。但如果连台球的运动都是不可预测的，那么行星的运动、天气的演化、帝国的兴衰又会如何呢？这是非常有趣的问题，而答案，如我们将要看到的，它们各自不同。行星运动在几个世纪的时间里都是可以预测的，而天

气演化的预报则最多只在一到两周内有效。要去讨论帝国的兴衰和人类的历史就的确显得有些野心勃勃了，但即便如此要得到一些结论也还是可能的，它们都朝向不可预测性。人们可以体会，当科学家们意识到这都是他们力所能及的一些问题的时候，那种热切的心情。

不过，我们仍须谨慎行事。如果你具备一个科学家的批判性思维的话，在允许我着手考虑人类未来的可预测性之前，你会希望就台球问题再做几点澄清。

例如，在研究台球运动的时候，我们忽略了摩擦。我们可以这样做吗？这类问题在物理学的研究中总是存在：某个理想化模型是可以接受的吗？这里，摩擦的存在意味着台球最终将要停止下来。但是如果台球在运动变得不可预测以后很久才停下来，那么这种无摩擦的理想化模型就是可用的。

现在我们必须面临一个更为严峻的问题：初条件敏感依赖性到底有多么普遍？我们已经考虑了一个特殊的系统，有凸起障碍物的台球游戏，并且已经论证了初条件非常微小的一点儿不确定性将会导致长期的不可预测性。是大多数系统都像这样，还是这个系统只是一个特例？我所谓的“系统”，是指没有摩擦的力学系统，或存在摩擦，但同时还带有能量来源可以补偿由于摩擦而耗散的能量的系统，或更一般地带有电的或化学成分的系统等等。重要的是，我们有明确定义的所谓*确定性*时间演化。数学家们因此就说我们有了一个*动力系统*(dynamical system)。行星沿着轨道绕恒星运行，就形成了一个动力系统(一个基本无摩擦的力学系统)。由螺旋桨搅拌着的黏性流体，也是一个动力系统(因为有摩擦，所以这种情况叫做“耗散”动力系统)。如果我们能够找到一种使人类历史成为确定性时间演化的合适的理想化模型，那么它也是一个动力系统。

但让我们回到我们的问题上来：初条件敏感依赖性是动力系统的特例还是通则？通常情况下，有没有长期可预测性？事实上，各种可能性都存在。在一些情况下，并不存在初条件敏感依赖性(想像一个有摩擦的单摆，它会以非常可预言的方式趋向静止)。而在另一些情况下，对所有初条件都存在初条件敏感依赖性(这正是我们有凸起阻碍物的台球游戏的情形，而你不得不承认，这并不是一个完全例外的情况)。最后，有许多动力系统都是这样的，它们对某些初条件存在长期可预测性，而对另一些则不然。

一方面，所有可能性都存在也许听起来有些令人失望。另一方面，设想如果我们可以辨别出哪些系统有初条件敏感依赖性，并且断定对这些系统多长时间的预测是人们可以相信的，那我们就真的获知了一些关于事物本质的有用东西了。

在这一点上，从历史的观点出发考察对初条件的敏感依赖性也许是个很好的想法。当然，人们在几千年前就已经了解，小原因可以产生大结果，因此未来很难预测。相对新的东西是这样一个证明：对于某些系统，初条件的微小变化常常使预测结果变得如此不同，以致一会儿以后，预测事实上已经没用了。这一证明是由法国数学家阿达马(Jacques Hadamard)在 19 世纪末给出的[1](当时他大约 30 岁；他很高寿，死于 1963 年)。

阿达马所考察的系统是一种奇怪的台球游戏，它的台球桌不是平坦的，而是扭曲了的*负曲率表面*。人们研究质点在这种表面上的无摩擦运动。因此，阿达马的台球游戏在学术上的术语是负曲率表面上的*测地流*(geodesic flow)。这种测地流在数学上相当容易处理，[2]阿达马已经将对初条件的敏感依赖性证明为一个定理。(这个证明比相应于有凸起障碍物的台球游戏的证明要简单得多。相对而言，很迟

才得到对后者的证明——20世纪70年代由西奈给出。）

法国物理学家迪昂（Pierre Duhem）是了解阿达马结果的重要哲学意义的人之一。（迪昂在许多领域都具有领先他那个时代的想法，尽管他的政治观点明显是反动的。）在1906年出版的一本科普读物中，迪昂写了其中的一节，标题是“数学演绎永远无用的一个例子”。[3]所讨论的数学演绎，如他所解释的，是阿达马台球桌上轨迹的计算。其所以“永远无用”，是因为必然存在初条件的微小不确定性，而如果我们等待足够长的时间，它就会导致所预测的轨迹的大的不确定性，从而使预测毫无意义。

另一位法国科学家，当时写了一些关于科学的哲学书籍，他就是著名的数学家庞加莱。在1908年出版的*Science et Méthode*（《科学与方法》）一书[4]中，他以相当非专门的方式讨论了不可预测性问题。他没有引用阿达马或相关的数学[但请记住庞加莱创立了动力系统理论（theory of dynamical systems），并且比其他任何人都更了解这一学科]。庞加莱的基本观点是，长期不可预测性调和了机遇和确定性。下面是一段相当干脆的表述：**被我们忽略了的非常微小的原因决定着我们不能忽略的可观的结果，而事后我们说这个结果归因于机遇。**

庞加莱非常清楚，对于描述物理世界，概率是多么地有用。他知道机遇是日常生活的一部分。由于他也相信经典决定论（在他那个时代还没有量子不确定性），所以他想了解机遇是如何溜进来的。显然，他对这个问题考虑得很多，且提出了几个回答。换句话说，庞加莱看到了几条途径，通过它们，世界的经典决定论描述可以自然而然地导致概率的理想化。其中之一就是通过对初条件的敏感依赖性。[5]

庞加莱讨论了两个初条件敏感依赖性的例子。第一个是，由向各个方向飞速运动并不停碰撞的许多分子组成的气体。庞加莱断言这些碰撞产生了对初条件的敏感依赖性。（它类似于台球撞上凸起障碍物的情形。）气体中碰撞的不可预测性，证明了概率描述的正确性。

庞加莱的第二个例子是气象学，他论证了天气预报著名的不可信性是因为对初条件的敏感性，以及我们必然拥有的对初条件不太精确的知识。结果是，天气的演化似乎应该归因于机遇。

对于一位当代科学家来说，最惊人的事情莫过于庞加莱的分析是如此地时新。无论是硬质小球气体动力学，还是大气环流，都是近些年来用庞加莱所采用的观点进行研究的最初对象。

同样惊人的是，在庞加莱和物理学家们对初条件敏感依赖性的现代研究之间存在的时间鸿沟。在相关思想再一次显露出来，形成现在所谓混沌理论(theory of *chaos*)的过程中，阿达马、迪昂和庞加莱的物理洞察力没有起到什么作用。庞加莱的数学(或它的结果)确实起到了作用，但他关于天气预报的思想却是以另一种方式重新被发现的。

我想，对于这条令人困惑的历史鸿沟，有两种解释。第一个理由是量子力学的兴起。这种新的力学改变了物理学家的科学观念，许多年来都占据着他们全部的精力。试想，当量子力学引入了一个新的——更本质的——机遇和随机性的来源时，物理学家们为什么还要麻烦地用经典力学中的初条件敏感依赖性来解释机遇呢？

我想到了迪昂和庞加莱的思想湮没无闻，而不是被现代混沌理论所追随的另一个原因。这些思想来得太早了：开发它们的工具还没有出现。例如，庞加莱手头没有测度论(measure theory)或遍历定理

(ergodic theorem)等数学工具，因此，他也就不能用精确的语言去表述那些关于机遇的卓越的直觉思想。当一位当代科学家阅读庞加莱的哲学著作时，在他的心里有着一整套用于解释书中思想的概念体系，但这些概念对庞加莱自己却无从得到！另一个事实是，如果数学失败了，我们现在可以求助于计算机模拟。这个在现代混沌理论中起着如此基本作用的工具，在20世纪初当然还不存在。

注 释：

1. J. Hadamard, "Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques," *J. Math. pures et appl.* 4 (1898): 27～73，重印于 *Oeuvres de Jacques Hadamard* (Paris: CNRS, 1968), vol. 2, pp. 729～775。注意，阿达马的原始论文已经清楚地论及，如果存在初条件的任何误差，系统的长期行为是不可预测的。

2. 研究具有恒常负曲率的紧致表面是最容易的。（它们唯一的困难是不能像阿达马表面那样，在三维欧几里得空间中将它表现出来。）你大概还记得欧几里得公设：过直线外一点，有且仅有一条直线与它平行。并且你还知道可以构造使这一公设不再成立的非欧几里得几何。特别是，在罗巴切夫斯基(Lobachevsky)平面中，过直线外一点有许多条直线与它平行。因此，罗巴切夫斯基平面中，沿平行线移动的两点常常会离得越来越远！从罗巴切夫斯基平面上裁下一片，将边缘粘合起来形成光滑闭合的曲面，这就得到了一个拥有恒常负曲率的台球(能够这样做当然需要证明)。那么，也就不难相信在这样一张台球桌上，直线运动将显示出对初条件的敏感依赖性。

3. 法文版，该节的标题是"Exemple de déduction mathématique à tout jamais inutilisable," in P. Duhem, *La théorie physique: Son objet et sa structure* (Paris: Chevalier et Rivière, 1906)。这篇文献是托姆推荐给我的。

4. H. Poincaré, *Science et Méthode*(参看第2章注释3)。相关的章节是第4章，"Le hasard"（机遇)。

5. 甚至不存在初条件敏感依赖性时，小原因仍然会产生大结果。大结果可能来自长时间的等待，正如庞加莱注意的那样。

另一个有趣的情形，是有多个平衡态的系统。也许很难确定哪一个初条件将把系统最终引向这一个或那一个平衡态。这种情况发生在各个平衡态的吸引盆(basins of attraction)的边界非常卷绕的时候，正如这种情形频繁发生的那样。磁摆(magnetic pendulum)——用一根硬棒将一小块磁石悬挂于其他几块磁石之上形成的摆——给我们提供了一个简单的例子。如果有人击打一下这样一个摆，它就会以复杂的方式开始振荡，且很难猜测它将停在哪一个平衡位置上(通常存在好几个这样的平衡态)。关于卷绕边界的绘景，请参看 S. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, and J. Yorke, "Fractal basin boundaries," *Physica* 17D (1985): 125～153。

庞加莱还注意到，出于我们对肌肉的控制不足也可能引起所谓的偶然性，并给出了轮盘赌的例子。掷硬币也非常相似，某些受过训练的人能够使掷出硬币的结果成为完全可预测的。

9. 湍流：模态

1957年的一个雨日，一列小小的送葬队伍抬着德·唐德尔(Theophile De Donder)教授的遗体向一个比利时墓地走去。灵车由一支骑着马的宪兵分队护送。死者有受此殊荣的权利，而遗孀希望这样。几个悲伤的科学同行跟随着灵车。

德·唐德尔是布鲁塞尔自由大学数学物理学的精神之父，故他也是我个人的精神祖父之一。他在他那个时代为热力学和广义相对论做了相当出色的研究工作(爱因斯坦称他为"le petit Docteur Gravitique")。[1]但当我认识他的时候，他已经是个干瘪的小老头儿，再也不做什么科学工作了。智能的力量已经永远地离开了他，但他仍保有对科学的渴望和迷恋，这些才是科学工作的根本所在。当他在大学里还能难倒一些同事的时候，他会对那个倒霉的人讲述他在"音乐的 ds^2"或"肝脏形状的数学理论"方面的研究。确实如此，音乐、形状和形式是周期性循环着吸引科学家们的课题。[2]当然还有一些其他的课题：时间及其不可逆性、机遇和随机性、生命。有一种现象——流体

的运动——似乎反映和结合了所有这些课题。想想空气流过管风琴管，或水形成总在变化着的，好像有着它们自己自由意志的涡旋和漩涡。想想火山喷发、喷泉和瀑布。有许多种不同的方法都可以产生这种令人崇敬的美丽。在艺术家作画、写诗、谱曲的地方，科学家创立科学理论。法国数学家勒雷(Jean Leray)告诉我，他花时间去观察塞纳河的河水流过巴黎新桥的桥桩时形成的各种涡旋和漩涡。这种沉思是他 1934 年那篇著名的流体动力学论文的灵感来源之一。[3]许多大科学家都曾经被流体的运动所吸引，特别是复杂、不规则、貌似游走无常的那种我们称之为湍流(turbulence)的运动。什么是湍流？对这个问题还没有显而易见的回答，直到今日它仍引起争论，尽管当人们看到湍流(turbulent flow)时，都能承认那确实就是湍流。

湍流很容易见到，但很难理解。庞加莱曾经考虑过流体动力学，且讲授过一门关于涡旋的课程，[4]但他没有冒险从事湍流理论。德国物理学家海森伯(Werner Heisenberg)，量子力学的奠基人，提出过一个从来不曾获得太多认可的湍流理论。据说，“湍流是理论的墓地”。当然，许多科学家像雷诺(Osborne Reynolds)、泰勒(Geoffrey I. Taylor)、卡门(Theodore von Kármán)、勒雷、柯尔莫哥洛夫、克赖切南(Robert Kraichnan)等等都对流体运动的物理学和数学作出过漂亮的贡献，但这个课题似乎仍未透露出最后的谜底。

在本章和下一章中，我将讲述一段趣事，有关理解湍流以及之后的混沌理论的科学奋斗史。它包含有我自己的亲身经历，所以比起涉及 20 世纪初的一些半神话的科学巨人的事情来，我可以描绘更多的细节。我将试着给出一个研究大气的思想框架，但不是一份有条不紊的历史报告。对于后者，建议读者最好还是去参阅原始论文，

它们中的许多篇都已被收集在两本再版的文集中了。[5]

新思想的发现是不能被安排的。这就是革命和其他一些社会大变动常常对科学有积极影响的原因。这些事件暂时打断了官僚政治琐碎事物的纠缠，削弱了科学研究组织者的控制，给人们以思考的机会。即使如此，1968 年 5 月法国的社会“事件”是令我感到愉快的，因为它们导致邮件和通讯中断，也产生了相当的智力激荡。正是在那时，我读朗道(Landau)和栗弗席兹(Lifshitz)的著作《流体力学》来试着自学流体动力学。我以自己的方式慢慢钻研着似乎是作者们津津乐道的复杂计算，突然发现了一个有趣之处：没有复杂计算的关于湍流发生的一节。

为了理解朗道的湍流发生理论，你必须牢记，像水这样的黏性流体，除非做些什么使其保持运动，否则最终都将归于静止。保持流体运动所用的力量大小不同，会导致不同的结果。举一个具体的例子，考虑从水龙头中流出的水流。作用于流体的力量的大小(根本上取决于重力作用)，可以通过打开龙头的大小来调节。如果龙头开得非常小，你可以使水流在龙头和水池之间保持**定常**(steady)：水柱看起来没有运动(尽管龙头显然是开着的)。小心地将龙头开大一点点，(有时)你可以使水柱作有规则地跳动。这种运动就是**周期的**(periodic)，而不是定常的。如果水龙头再开大一点儿，这种跳动就变成不规则的。最后，若水龙头开得很大，你将会看到非常不规则的流动，这就是**湍流**。此种相继事件是受到逐渐增大的外力激发的流体运动的典型。朗道将这种现象解释为：随着所用的外力增加，就会激发出流体系统越来越多的**模态**(modes)。

在这里，我们必须深入物理学中尝试了解什么是模态。我们身边的很多物体都会因为受到敲击而开始振动或摇摆：摆、金属杆、乐

器上的弦都很容易产生周期运动。这样的周期运动就是模态。还有管风琴管中空气柱的振动模态(modes of vibration)、悬索桥的振荡模态(modes of oscillation)等等。一个给定的物理研究对象常常有许多不同的模态，这些模态是我们想要去确定和控制的。考虑设计教堂挂钟的例子：如果钟的不同振动模态与一些不和谐的频率相对应，那么敲起来就不悦耳动听了。模态的一个重要例子是一块固态物质中原子在其平均位置附近所作的振动，相应的模态称为*声子*(phonons)。还是让我们回到朗道的问题。他提出的观点是：当流体受到外力作用而开始运动时，一定数目的流体模态就被激发出来了。如果没有模态被激发，流体就处在定常状态；如果单一模态被激发，就是周期振荡；如果几个模态被激发，流动就变得不规则；许多模态被激发的时候，就是湍流。朗道通过数学论证支持了他的看法，在此我不再重现他的论述。[独立于朗道，德国数学家霍普夫(Eberhard Hopf)发表了一个类似的理论，数学上更为完备一点儿。][6]至于物理实验，可以对湍流振荡进行时频分析，即寻找所出现的频率。人们发现有许多频率出现——事实上，是一个连续的频谱——因此也就对应于非常多被激发的流体模态。

如上所述，朗道-霍普夫理论似乎对*湍流发生*给出了一个令人满意的描述：当作用于流体的外力增加时，流体运动成为湍流。然而，当我看到朗道的解释时，立刻感到不满，所基于的数学理由过一会儿就会明朗。

到这里，还应该对模态再多说几句。在许多情况下，你都可以让一个物理系统同时按照几个不同的模态振荡，而不同振荡之间没有相互影响。必须承认，这不是一个非常严格的陈述。为了建立更加明确的绘景，把模态考虑成包含在我们的物理系统中的相互独立振荡

的振荡器(oscillators)。实际上，这个思维绘景(mental picture)已经被物理学家们广为接受了。

用库恩(Thomas Kuhn)[7]的术语，我们可以说，物理学许多领域中基于被想像成独立振荡器的模态的解释是一个范式(paradigm)。正是因为它的简单性和一般性，模态范式非常地有用。无论定义的模态是独立的还是近乎独立的，它都管用。例如，固体中原子的振荡模态(所谓的声子)，就不是完全独立的：存在着声子—声子相互作用，但相对较小，且物理学家(在某种程度上)能够控制它们。

我所以不喜欢朗道对湍流的模态描述是因为我听过托姆的一些报告，研究了斯梅尔(Steve Smale)[8]的一篇重要论文——“可微动力系统”。法国人托姆和美国人斯梅尔都是杰出的数学家。前者是我在巴黎附近高等科学研究所(Institut des Hautes Etudes Scinetifiques)的同事，而后者常常去该所访问。从他们那里我了解到庞加莱动力系统思想的最新进展，由这些进展看来，模态范式的应用显然远不是普适的。例如，可以用模态描述的时间演化不会具有初条件敏感依赖性。我将在下一章证明这一陈述，并说明由模态给出的时间演化与斯梅尔讨论的时间演化相比是相当模糊的。越考虑这个问题，我就越不相信朗道的绘景：如果在黏性流体中存在模态，它们之间应该有强烈的而不是微弱的相互作用，从而产生出与模态绘景完全不同的东西，丰富而有趣得多的东西。

如今，当一个科学家认为他发现了新东西的时候，该做些什么呢？他应该用系统化的专业语言写出论文寄给科学期刊的编辑，准备发表。编辑会请一个或几个同事为该论文做“审稿人”，如果论文被接受，最终就会被发表在相关科学期刊上。别在报摊上寻找这些期刊——它们不在那儿出售。它们将被寄给科学家们，塞满大学

教授办公室里的柜子，在大型科学图书馆里堆上好几英里长。

撰写题为“论湍流的性质”的论文是一项与塔肯斯（Floris Takens）的合资，塔肯斯是一位荷兰数学家，他贡献了他的数学专业知识，毫不畏惧插手来写一篇关于物理学的论文。在这篇论文中，我们解释了为什么我们认为朗道的湍流绘景是错误的，并且提出了一些别的东西，涉及奇怪吸引子（strange attractors）。奇怪吸引子的思想来自于斯梅尔的文章，但名字是新的，不过现在已经没有人记得这名字是塔肯斯、我、还是别的什么人发明的了。我们将我们的手稿递交到一份相应的科学杂志，很快就被拒绝了：退回。编辑不喜欢我们的想法，还建议我们去看他自己的文章以便学习湍流的真意。

到此，我将暂时把“论湍流的性质”这篇文章留给它难以预料的将来，转而讨论更为吸引人的东西：奇怪吸引子。

注　释：

1．“小小‘引力’博士”：感谢于伦贝克（George Uhlenbeck）给了我这个故事，同时，感谢德默（Marcel Demeur）告诉我关于德·唐德尔的其他情况。

2．从事科学研究工作，最根本的是对其强烈着迷，有关它的许多材料可以在访问科学家们的时候收集到。对于这些材料的解释将会很微妙，但也许可以提供一些对科学发现心理学的新的洞见。在这样的研究中，由于患精神病或年迈的科学家们的动机更加透明，所以他们具有特别的重要性。（许多人在还年轻的时候很不幸地丧失了对科学的兴趣，而身心却仍然保持完全正常。然而就我所知，至少有一个奇异的例子——一位伟大的物理学家，他对日常生活中事物的判断能力变得相当微弱，但一旦谈及科学，他又会变得清醒而伟大。）

3．J．Leray，“Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace，” *Acta Math*．63（1934）：193～248.

4．H．Poincaré，*Théorie des tourbillons*（Paris：Carré et Naud，1892）.

5．P．Cvitanović，*Universality in Chaos*（Bristol：Adam Hilger，1984）；Hao Bai-Lin，*Chaos*（Singapore：World Scientific，1984）。通俗的介绍，见 J．Gleick，*Chaos*（New York：Viking，1987）。这是一本可读性很强的报告文学，但涉及历史准确性或科学优先权这样的问题时并不全都真实可信。一本优秀的入门读物是：I．Stewart，*Does God Play Dice？The New Mathematics of Chaos*（London：Penguin，1990）。

6．原始文献是：L．D．Landau，“On the problem of turbulence，” *Dokl．Akad．Nauk SSSR* 44，no．8（1944）：339～342；E．Hopf，“A mathematical example

displaying the features of turbulence," *Commun. Pure Appl. Math.* 1 (1948): 303~322。朗道思想的英文本，可见于 L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1959)的§27。

7. T. S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolution*, 2d ed. (Chicago: University of Chicago Press, 1970)。我并非是库恩思想不加批判的信奉者；特别是，他对我来说似乎与纯数学无关。然而，模态和混沌这些物理概念似乎与库恩的范式描述相当吻合。

8. S. Smale, "Differentiable dynamical systems," *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967): 747~817.

10. 湍流：奇怪吸引子

数学并不只是公式和定理的集合；它还包含着思想。其中最普遍的思想之一就是几何化(geometrization)。这基本上就意味着把各类事物形象化成空间的点。

“几何化”有许多表现为图解的实际应用。假设你对风寒指数(wind-chill factors)感兴趣，就会觉得绘制一张如图10.1(a)那样的温度—风速图可以使工作变得方便。

这种表达方式的一个优点，是你不用受单一单位制的约束。如果你是一个飞行员，图 10.1(b)那样的图将很有用：它给出风向的同时，也给出了风速。在同样的3维图上，除了风向和风速，你还可以获得气温。很容易想像这种三维图形，但是只能把它的2维投影画在纸上。如果你还想显示大气压和相对湿度，就需要一个5维空间，这时你也许以为几何图像已经不现实或没有用了。不是说能“看见四维”空间的人都被关在疯人院吗？事实上是这样的，把4、5、……或无穷维空间中事物形象化只是许多数学家和其他科学家

的家常便饭。诀窍的一部分是将各种2维或3维投影形象化，另一部分则是记住几个让你知道事物应该如何的法则。例如，图10.2(a)显示的是在10维空间中一条直线与一个9维球面(这9维球面或“超球”是由离点 O 同样距离的点构成的)相交于两点；图中直线的虚线部分表示在球内。

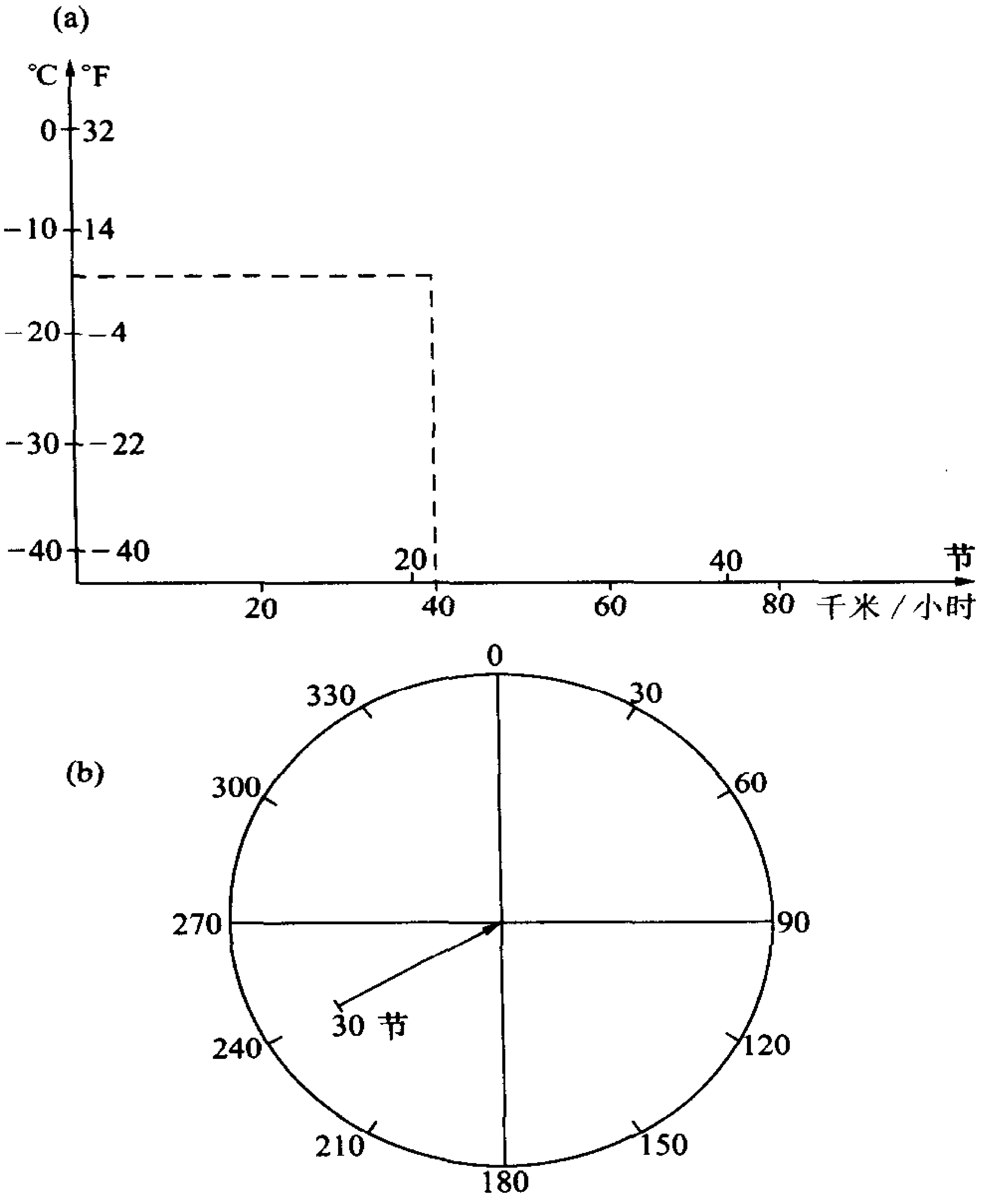


图10.1 表示(a)风速和温度或表示(b)风速和风向的图。

事实上，图10.2(a)表示的是任何大于或等于3维(例如，无穷维)的空间中，直线与超球的相交。2维空间中的情况如图10.2(b)。

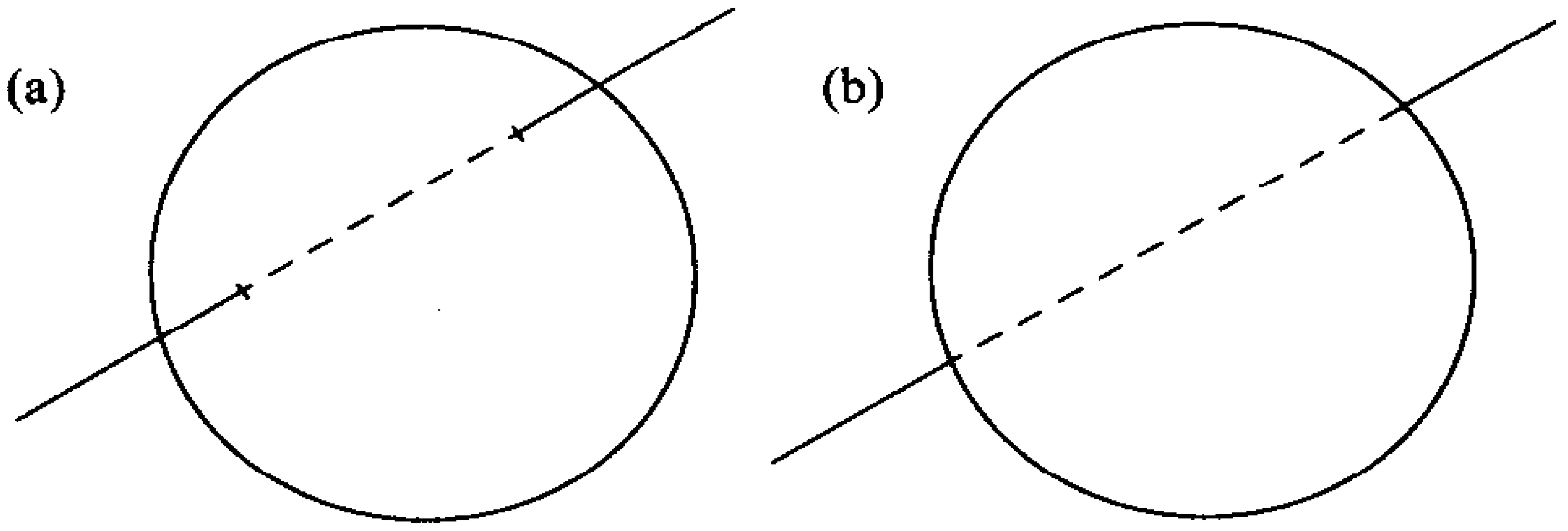


图 10.2 (a) 10 维空间中直线与球面相交；(b) 2 维空间中直线与球面相交。

现在我们回到上一章的振荡或“模态”，尝试将它们几何化。一个摆，或是振动杆，或其他什么振动物体的位置，由图 10.3(a)给出。它的位置从左(L)到右(R)，再从 R 到 L，如此循环往复地振动下去。这张图解的信息量不是很大，我们忽略了一些东西：振荡系统的状态并不完全由其位置所决定，我们还得知道它的速度。图 10.3(b)显示了在位置—速度平面上振荡器的轨道。这个轨道是一个环(如果你愿意，它可以是一个圆)，代表振荡器状态的点以一定的周期绕环运动。

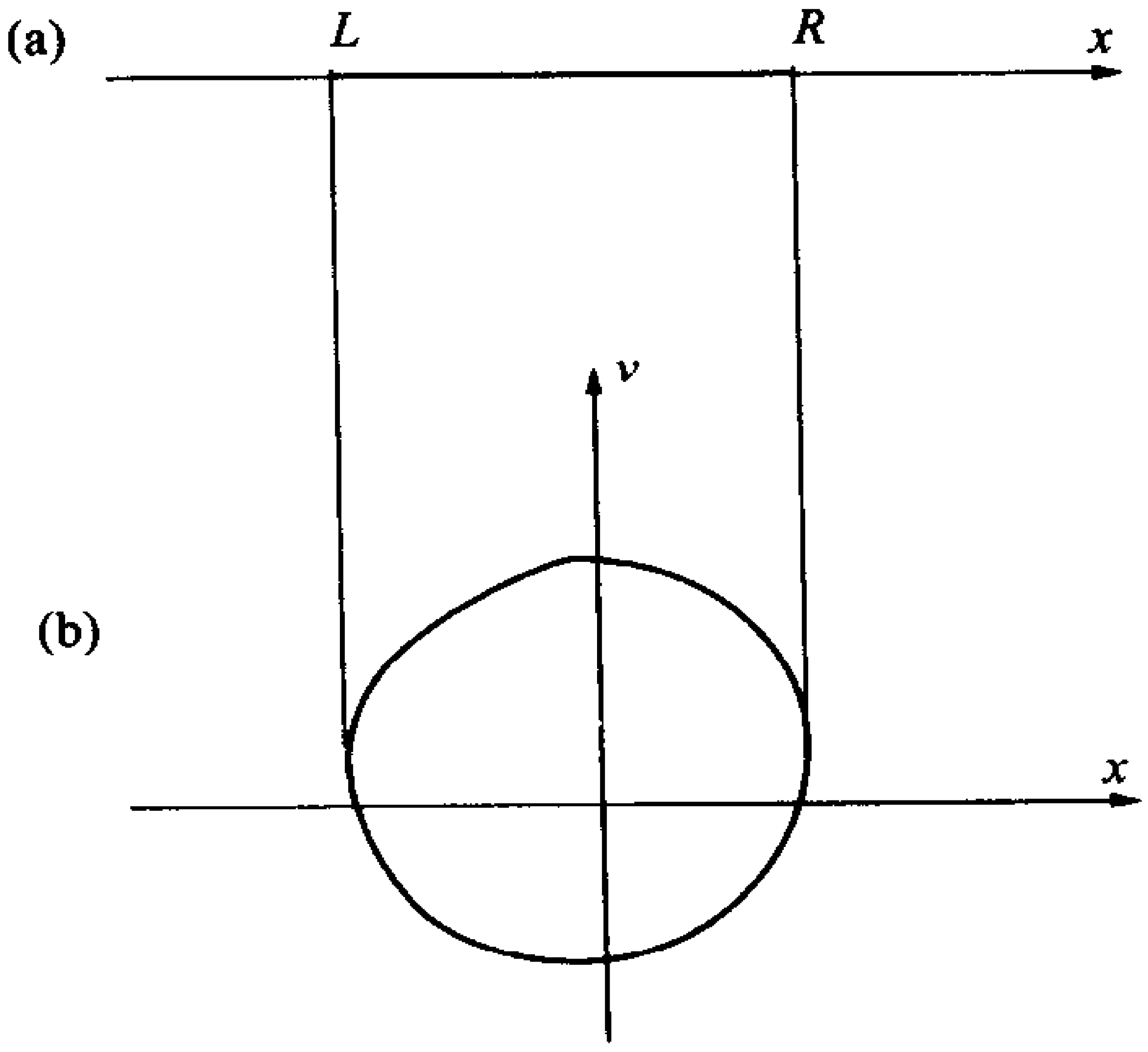


图 10.3 振荡点：(a)位置 x；(b)位置 x 和速度 v。

现在让我们转而讨论流体系统，诸如早先考察过的流着水的水龙头。在我们的讨论中，我们关心的是系统的长期行为，忽略出现的暂态(transients)，例如，打开水龙头的那一瞬间。为了表达我们的系统，我们需要一个无穷维空间，因为我们必须确定流体所占据空间中所有点的速度，而这样的点有无穷多个。但这难不倒我们。图 10.4(a)显示的是流体的定常状态：点 P 表示系统没有运动。图 10.4(b)显示的是流体的周期振荡：点 P 的轨道是一个环，P 在其上作周期性环绕。

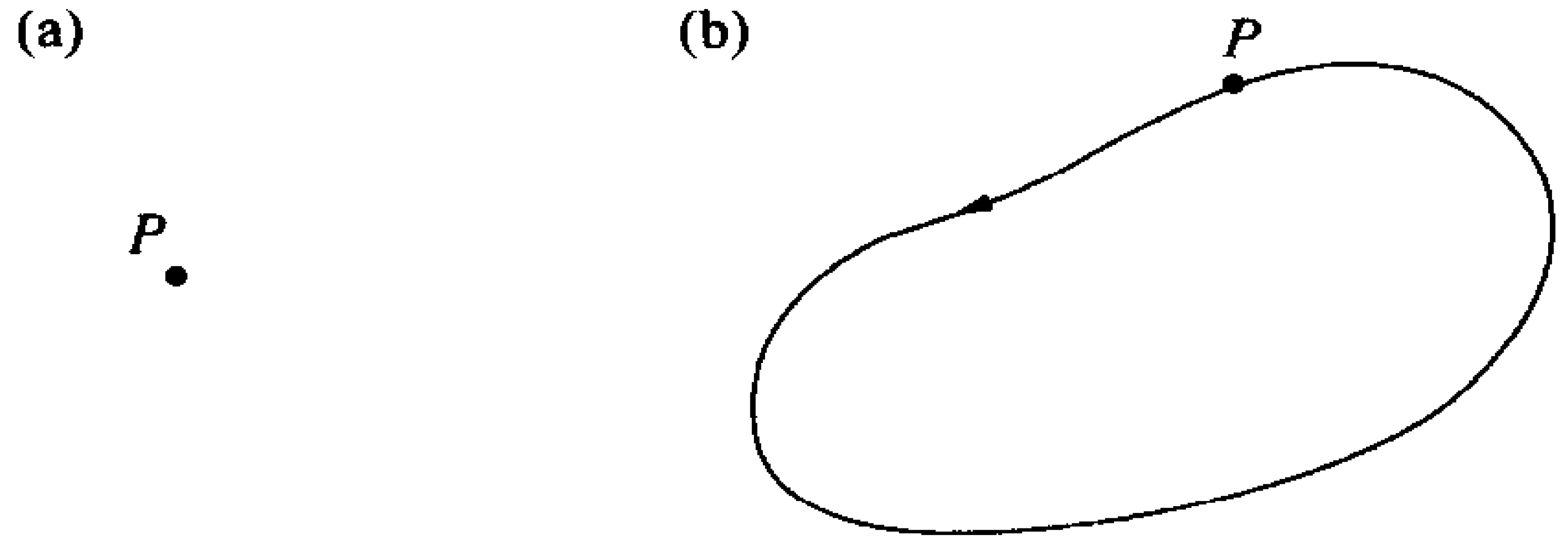


图 10.4 (a)不动点 P 代表定常状态；(b)周期环代表流体的周期振荡。该图所表达的是投影在 2 维纸上的无穷维空间中的事物。

很容易对图 10.4(b)做一下“调整”，使环变成圆，并使其上的运动维持匀速。(这可以通过数学家所谓的非线性坐标变换来实现，就像透过变形的玻璃看同一幅图画那样。)我们的周期振荡或“模态”现在由图 10.5(a)描述。

到此，我们已经具有了将几个模态叠加形象化所需要的所有思想：如图 10.5(b)所示，代表系统的点 P 在几个不同的投影下，其圆周运动表现出了不同的角速度，相当于不同的周期。(投影的方式必须适当地选取，它涉及非线性坐标变换。)有兴趣的读者可以检验这个时间演化不具有初条件敏感依赖性。[1]

现在来看图 10.6！ 这是一幅 3 维空间中时间演化的透视图。 这个运动发生在一个复杂的集合上，称为奇怪吸引子，更准确的说是洛伦茨吸引子(Lorenz attractor)。[2]

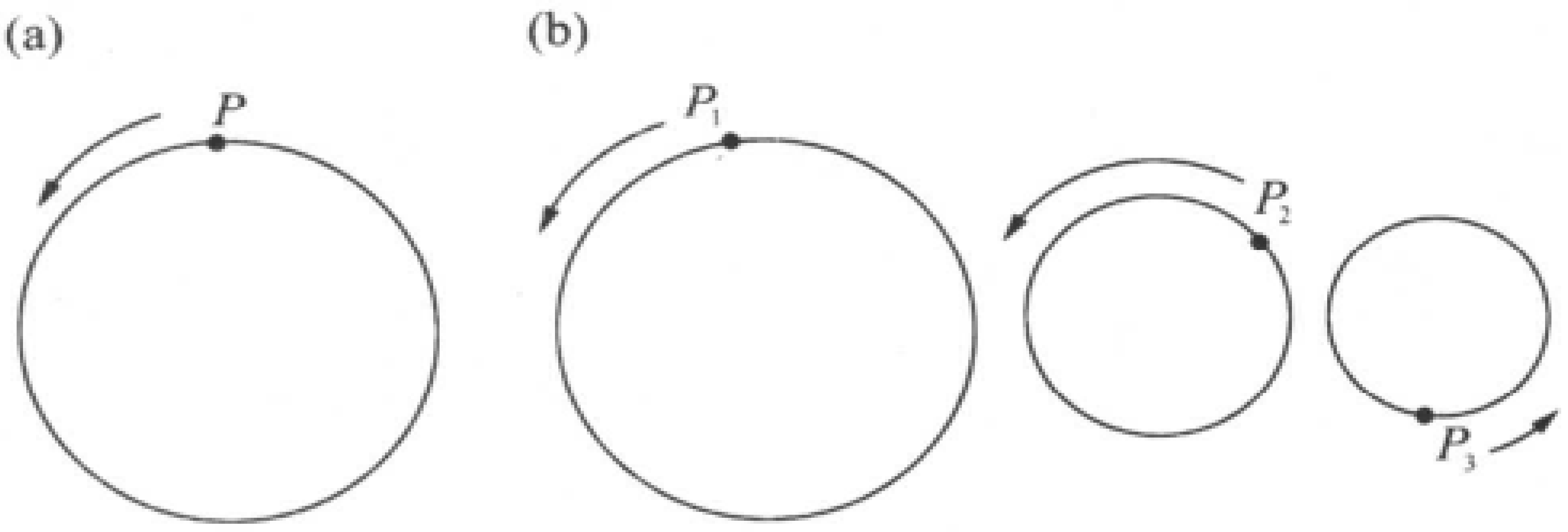
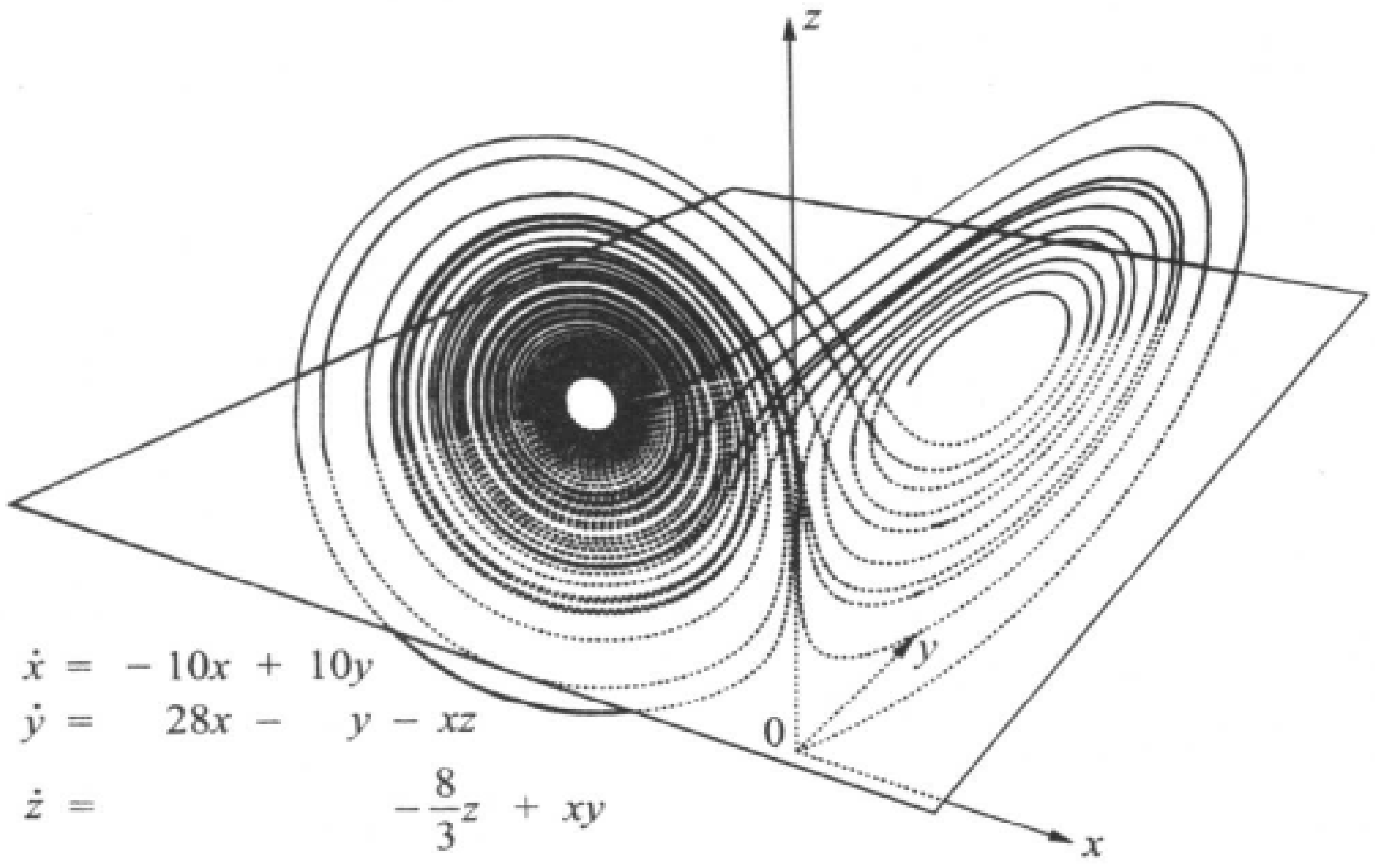


图 10.5 (a)由一个匀速绕圆运动的点 P 描述的周期振荡(模态)；(b)由几个不同投影所描述的几个模态的叠加。



$$\dot{x} = -10x + 10y$$
$$\dot{y} = 28x - y - xz$$
$$\dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy$$

图 10.6 洛伦茨吸引子。 兰福德(Oscar Lanford)用计算机绘制得到(见 *Lecture Notes in Math*. no. 615, p. 114, [Berlin: Springer, 1977]；惠允复制)。

洛伦茨(Edward Lorenz)是一位工作于麻省理工学院的气象学家。 作为气象学家，他对大气对流现象感兴趣。 对流现象是：太阳加热地面，因此低层大气变得比上层的暖而轻，这就导致暖而轻空气向上运动，冷而重的空气向下运动，构成对流。 空气像早先讨论过的水一样是流体，也应该用无穷维空间中的点来描述。 通过粗略的

近似，洛伦茨用一个能够在计算机上研究的3维空间中的时间演化代替了正确的无穷维空间中的时间演化。计算机产生的结果就是图10.6所示的东西，现在我们称之为洛伦茨吸引子。我们要想像代表对流大气状态的点 P 随时间沿计算机给出的轨道运动。在所画出的情况下，点 P 从坐标原点 O 附近开始，围绕吸引子的右“耳”运动，然后再绕左“耳”转几圈，再次绕右“耳”旋转，如此循环往复。如果点 P 在点 O 附近的初始位置稍稍变化一点点(以至于肉眼不能分辨这种差别)，图10.6的细节就会完全变化。整体上，图形仍保持原貌，但相继绕右耳和左耳的次数将完全不同。正如洛伦茨所认识到的，这是因为图10.6的时间演化具有初条件敏感依赖性。因此，相继围绕左耳和右耳旋转的次数就不稳定，明显具有随机性，很难预测。

洛伦茨时间演化并不是大气对流的真实描述，但是它的研究仍然给大气运动的不可预测性以非常强有力的论据。作为气象学家，洛伦茨因此就可以给他的职业无法做出可靠的长期天气预报找到有理有据的托辞。如上所述，庞加莱早就已经给出了完全一样的陈述(洛伦茨对此一无所知)。但是洛伦茨的方法具有明确的优势，它可以扩展到大气运动的实际研究中去。在离开洛伦茨以前，让我说明一点，尽管气象学家们已经知道了他的工作，但物理学家们注意到它却是相当迟的。

现在，让我们回到在上一章被我放弃了的那篇我与塔肯斯合写的论文“论湍流的性质”。它最终发表在了一份科学期刊上。[3](实际上，我是这份期刊的一个编委，为了发表那篇文章，我亲自接受了它。通常，这不是一个值得推荐的做法，但我觉得在这个特殊情况下，它还是正当的。)“论湍流的性质”含有一些同庞加莱与洛伦茨

早先发展的一样的思想(当时我们并未意识到这点)。但我们对大气运动及其与天气预报的相关性并无兴趣，而是论述流体动力学中湍流的一般性问题。我们的主张是，湍流不是(如朗道和霍普夫提出的那样)由许多模态的叠加，而是由奇怪吸引子所描述。

什么是吸引子？它是一个代表被研究系统的点 P 绝大多数情况下(即所谓的暂态结束之后)都在其上运动的集合。为了使这个定义有意义，很重要的一点是作用于系统的外力与时间无关(否则，我们就可以让点 P 以我们喜欢的任何方式运动)。另外同样重要的一点是，我们考虑的是耗散系统(黏性流体通过自摩擦耗散能量)。耗散是暂态结束的原因。耗散也是在代表系统的无穷维空间中仅有一个很小的集合(吸引子)真正有意义的原因。

图 10.4 中的不动点(fixed point)和周期环(periodic loop)都是吸引子，但它们没什么奇怪。代表有限数量模态的拟周期(quasi-periodic)吸引子也没什么奇怪(数学上称为环面)。[4]但是，和斯梅尔提出的许多吸引子(这些吸引子很难画出来)一样，洛伦茨吸引子是奇怪的。奇怪来自于在数学上并不等价，但在实际中通常同时出现如下的一些特点。

首先，奇怪吸引子看起来奇怪：它们不是光滑的曲线或曲面，而具有“非整数维”(non-integer dimension)——或按照芒德布罗(Benoit Mandelbrot)所提出的，它们是分形(fractal)客体。[5]其次，更重要的是，在奇怪吸引子上的运动具有初条件敏感依赖性。最后，当奇怪吸引子仅有有限维的时候，时频分析显示为连续频谱。

最后还有一点值得进一步解释。代表黏性流体流动的吸引子是无穷维空间的一部分，而它本身仅有有限维，因此也就容易用有限维空间中的投影来表示。根据模态范式，有限维空间只能描述有限个

模态。（数学上，有限维空间只能包含有限维环面。）然而，频率分析显示出人们解释为连续模态的连续频谱。这可能吗？它与湍流有什么关系？

注　释：

1．沿用第4章注释3的符号，初条件 x 经过时间 t 后给出点 $f^t x$。如果用 $x+\delta x$ 代替 x，则 $f^t x$ 变为 $f^t x+\delta f^t x$，而如果 $\delta f^t x=\frac{\partial f^t x}{\partial x}\cdot\delta x$ 随 t 指数增长，我们就说我们有对初条件的敏感依赖性。更准确地说，如果偏导数矩阵 $\partial f^t x/\partial x$ 有随 t 指数增长的范数，则我们有对初条件的敏感依赖性。现在考虑由初值分别为 θ_1，…，θ_k 的 k 个角度描述的运动，经过时间 t 后，这些角度变为：$\theta_1+\omega_1 t$，…，$\theta_k+\omega_k t$（以 2π 为模）。写作

$$f^t(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k)=(\theta_1+\omega_1 t,\ \ldots,\ \theta_k+\omega_k t),\tag{1}$$

我们发现

$$\delta f^t(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k)=(\delta\theta_1,\ \ldots,\ \delta\theta_k)。$$

等式的右边与 t 无关，因此我们不具有对初条件的敏感依赖性。通过变量替换能够成为(1)式那种形式的时间演化称为是拟周期的，仍然不具有对初条件的敏感依赖性。注意：上面讨论的变量替换是以 k 个角度进行参量化的，对应于 k 个模态的叠加。可以用 k 个角度加以参量化的集合是 k 环面或 k 维环面(即 k 个圆之积)。

2．E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *J. Atmos. Sci.* 20 (1963): 130～141.

3．D. Ruelle and F. Takens, "On the nature of turbulence," *Commun. Math. Phys.* 20 (1971): 167～192; 23 (1971): 343～344.

4．参看如上第10章注释1。

5．B. Mandelbrot, *Les objets fractals* (Paris: Flammarion, 1975)；英文版：*The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco: Freeman, 1977)。芒德布罗吸引科学家们关注自然对象中分形形状的普遍存在性。这是一个重要且收获颇丰的贡献，但对分形形状是如何产生的，至今仍得不到一个普遍的认识。

11. 混沌：一个新的范式

科学家们不仅撰写科学论文，还通过做报告的形式把他们的思想和结果告知同行，这就是所谓的“研讨会”（seminar）。十几个同行——可以更多，也可以更少——集中在一起坐上个把钟头，看着一些方程和图解，听听讲解。有些人做笔记，或假装做笔记，而实际上正琢磨自己的问题；有些人似乎在打盹儿，却会突然醒过来提出一些尖锐的问题。许多研讨会的报告都是令人绝望的费解，要么是报告者在半个小时后才意识到有一些基本的问题忘了在一开始交待清楚；要么是她完全迷失在她的演算中；要么就是他说着一口除了他自己没人能听懂的巴尔干英语或亚洲英语。无论如何，研讨会在科学家们的科学生涯中占着非常核心的位置：有些是才华横溢且具启蒙性的；有些则只是金玉其外，实则枯燥乏味；还有一些对外行来说完全是对牛弹琴，但事实上极其引人入胜。

塔肯斯和我完成了我们关于湍流的论文写作之后，我就这个问题以及之后的一些工作在美国许多大学和研究所做了许多报告。

(1970～1971 学年，我在普林斯顿高等研究院访问。)反应什么样的都有，但总体上说比较冷淡。记得一次，物理学家杨振宁(C. N. Yang)邀请我去做了一个报告。之后，他取笑了我的“有争议的湍流思想”——在当时这是一个恰如其分的评价。

是什么使物理学家感觉不自在呢？是这样的，当流体逐渐受到增加外力的刺激时，公认的理论预示着流体中出现的独立频率的数目应该逐渐增加。而奇怪吸引子的预测则有完全不同的结果：应该出现一个连续的频谱。事实上，这种差别可以通过对受到适当激发的流体所产生的信号做频率分析加以检验。哈佛的马丁(Paul Martin)做了数值研究。后来纽约市立学院的戈卢布(Jerry Gollub)和斯温尼(Harry Swinney)设计了实验。[1]这两方面的结果都更有利于湍流发生的吕埃勒-塔肯斯绘景，而不支持朗道-霍普夫绘景。

这是一个转折点。当时不是每个人都承认这个理论的，但是在戈卢布和斯温尼的实验以后，这个有争议的思想逐渐变得有吸引力，接着又变成了著名的思想。起先是几个，后来许多物理学家和数学家开始从事奇怪吸引子和初条件敏感依赖性的研究。人们认识到了洛伦茨思想的重要性。一个新的范式出现了，并且从马里兰大学应用数学家约克(Jim Yorke)那里得到了它的名字——*混沌*(chaos)。[2]我们现在所称的混沌是具初条件敏感依赖性的时间演化。因此，在奇怪吸引子上的运动是混沌的(chaotic)。如果观测到的不规则振荡看似噪声，但它的产生机制是确定性的，我们也称之为*确定性噪声*(deterministic noise)。

由于混沌理论特别优美和重要，其中的一个结果引起了人们的注意——这就是费根鲍姆(Mitchell Feigenbaum)的周期倍化级联(period-doubling cascade)。我将试着给出费根鲍姆发现的一个思想

框架，而不涉及专业细节。当改变作用在物理动力系统上的力时，常常可以看见如图 11.1 所示的周期倍化现象。一个周期轨道被另一个很接近它的周期轨道所代替，但在这个新的轨道上，要转两圈才能回到原来的起点。从而返回所用的时间——周期——就近似加倍。在某些对流实验中观测到了这种周期倍化现象：从下面加热的流体表现出某种周期运动，调整加热装置就会产生另一种周期为原来两倍的周期运动。周期性滴水的水龙头也可以观测到周期倍化现象：（在一定条件下）当水龙头打开大一点儿，周期就加倍。还有许多这样的例子。

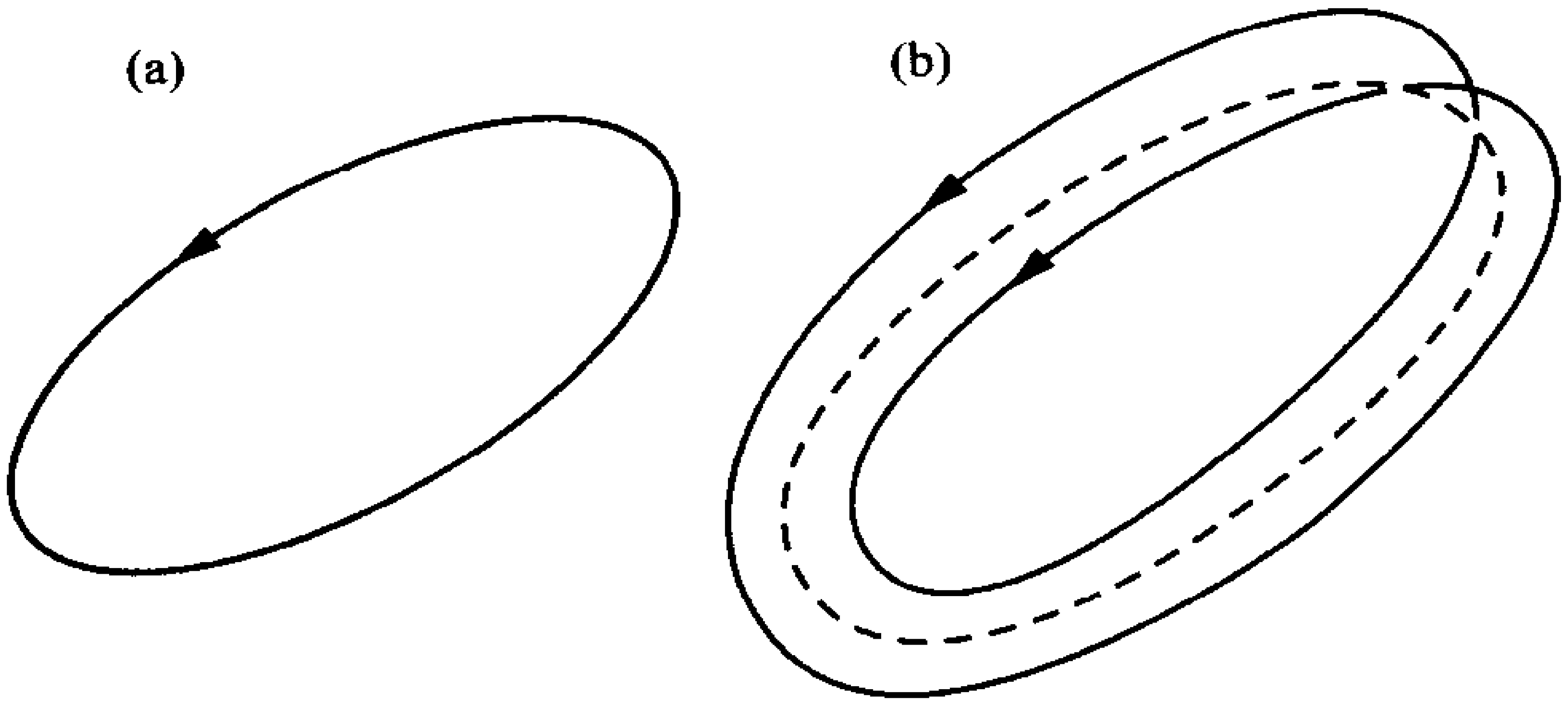


图 11.1 周期倍化：(a)周期轨道的投影；(b)这一轨道被另一个周期约两倍长的轨道所代替。

有趣的是，周期倍化能够一再发生，从而产生 4 倍、8 倍、16 倍、32 倍、64 倍……的周期。这种周期倍化级联示于图 11.2。水平轴表示作用于系统的力，相继周期倍化发生的位置为 A_1、A_2、$A_3 \ldots$，它们在点 A_∞ 处堆积在一起。现在我们来看看间隔 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、$A_4A_5 \ldots$，它们具有相邻两间隔之比接近于常数的如下特性：

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} \approx \frac{A_2A_3}{A_3A_4} \approx \frac{A_3A_4}{A_4A_5} \approx \ldots$$

更精确地，以下著名的公式成立：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n A_{n+1}}{A_{n+1} A_{n+2}} = 4.66920 \ldots$$

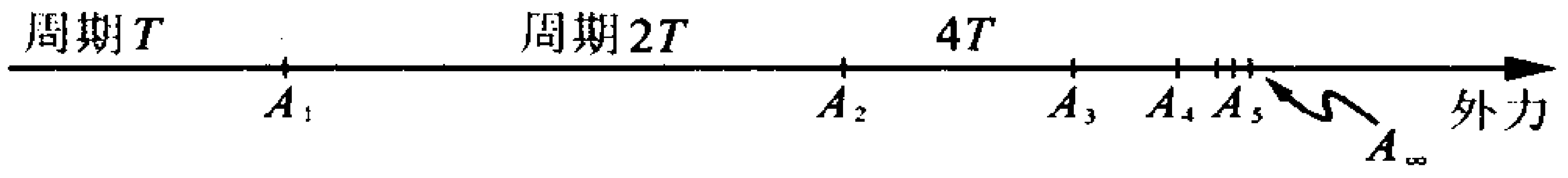


图 11.2 周期倍化级联。当作用于系统的力改变时，在 A_1、A_2、$A_3 \ldots$ 处发生周期倍化，它们在 A_∞ 处堆积在一起。值得一提的是，为了便于显示，比值 4.66920... 在本图中已由一个较小的数值代替。

在费根鲍姆之后，洛斯阿拉莫斯的一个青年物理学家从数值模拟中发现了这个公式（他整天都在摆弄他的计算机），并进而着手证明它。为此，他沿用了物理学家威尔逊（Kenneth Wilson）（当时在康内尔）的**重正化群**（Renormalization Group）思想。他发现，相继周期倍化现象在适当地重新标度（即对问题中各种参量的单位进行适当调整）之后基本上还是一样的。制定出必要的重新标度不是件容易的事情，而且费根鲍姆并没有给出问题的完整数学处理方法。这是由兰福德（当时在伯克利）后来根据费根鲍姆的思想给出的。有意思的是，兰福德给出了一个计算机辅助证明。这意味着证明涉及相当长的数值验证，用手去做是不现实的。这些都由计算机非常严格地完成了。

周期倍化级联的一个非常重要之处在于，当你在实验中看到它时，不可能把它误认为是别的什么现象。并且，我们知道在级联之后（图 11.2 中点 A_∞ 的右边）存在着混沌。因此，流体动力学中观测到费根鲍姆级联（Feigenbaum cascade）就成为模态不得不向混沌让路的特别令人信服的证据。

我忘了说一件事。当费根鲍姆将他关于周期倍化级联的文章投递给一份科学期刊希望发表时，被拒绝了。不过后来他找到了一个

更加开明的编辑接受了他的文章，发表在另一份期刊上。[3]

让我们回到湍流中奇怪吸引子的问题。 注意，在我们的讨论中没有用到任何有关流体动力学的特殊知识，除了黏性流体是耗散系统以外。 我们也许由此而期望在各种耗散动力系统中看到奇怪吸引子和混沌（或确定性噪声）。 而现在，无数的实验确实证明了这一点。

但让我稍稍向前追溯一下自己的混沌体验。 我知道某些化学反应以时间振荡的方式进行，且派伊（Kendall Pye）和钱斯（Britton Chance）的一篇文章描述了生物起源化学系统中的这种振荡。[4]因此，我于 1971 年初前往费城，见到了钱斯教授和他的实验小组，向他们解释看到非周期 “湍流”振荡和看到周期振荡是一样可能的。 遗憾的是，小组内的“数学专家”持否定意见，钱斯即不再考虑这个思想。 后来我与派伊讨论这件事时，他表示了更多的同情，但他解释说，如果他监测的反应得到了“湍流”而不是周期记录，这次实验将宣告失败，他将扯烂记录，扔到废纸篓中。 回顾这个故事，“混沌”的科学冲击力可见一斑。 现在再得到湍流或混沌的实验记录，人们已经能够认出它来，且进行仔细研究。

我曾就我关于化学反应的见解写过一篇短文，送到一份科学期刊希望发表，结果被拒，不过后来被另一份期刊接受了。[5]混沌化学反应后来被观测到了，并且事实上导致波尔多的一组化学家第一次实现了实验奇怪吸引子的显式重构。[6]

上述开端之后几年，混沌变得时髦，相关主题的国际会议组织了起来。 后来，混沌被提高到非线性科学（Nonlinear Science）的高度，研究它的各种研究所纷纷成立。 完全致力于非线性科学的新的科学期刊纷纷涌现。 混沌的成功故事被媒体频频曝光，这个领域的所有科学家现在应该正满怀激情地上窜下跳。 他们之中有些如此，但有

些不是。让我来试着解释为什么。

目前，时尚在物理学和其他学科（数学则相对俭省）的社会学和资助方面上起着根本性的作用。一些专业课题（如混沌、弦论、高温超导体）流行不几年就被抛弃。与此同时，一大批人被成功而非其涉及的思想所吸引，而涌入该领域，导致学术气氛更加恶化。

让我谈谈对这种恶化的一点儿亲身感受。在前面我提到的有关化学振荡的短文发表后，一个同事告诉我："这篇文章非常成功，我想在大学图书馆查阅，但它已经被人用剃须刀片割掉了。"我当时并未在意，直到我收到另一所大学图书馆发来的一封信，说我的另一篇文章[7]的第一页被人撕去了。（就是说，这已不是仅仅为了获得一份免费的文章拷贝，而是为了使别人无法使用。）

这类蓄意破坏行为还只是特例。但无论如何，它代表着一种新的状况：主要的问题不再是使其他科学家相信你的有争议的思想代表着物理实在，而是不择手段地赢得竞争的胜利。

在当前情况下，可微动力系统的数学理论已经从"混沌"思想的涌现中获益匪浅，并且，整体上并未受到现今演变的损害（数学上的专业困难使得作弊很难）。然而，尽管混沌物理学（physics of chaos）经常洋洋得意地宣布获得了"新颖"的突破，有意义的发现却已经减少了。所幸的是，这阵狂热过去之后，对此课题困难的冷静估计将导致新一波高质量结果的涌现。

注　释：

1. J. B. Mc Laughlin and P. C. Martin, "Transition to turbulence of a statically stressed fluid," *Phys. Rev. Lett.* 33 (1974): 1189～1192; J. P. Gollub and H. L. Swinney, "Onset of turbulence in a rotating fluid," *Phys. Rev. Lett.* 35 (1975): 927～930.

2. T. Li and J. A. Yorke, "Period three implies chaos," *Amer. Math. Monthly* 82 (1975): 985～992。这篇欣然之作指出，对于一大类直线区间向其自身的映射来说，周期3这一周期点的存在就意味着其他任何周期的周期点全都存在。这种复杂的情形，就是该论文中所谓的**混沌**。这个名称的提出获得了显著的成功，但它被应用于一种不一样的情况！（具有许多周期轨道的时间演化，常常并不显示出对初条件的敏感依赖性。事实上，许多的周期轨道并不需要处在某个吸引子上，因此它们的存在与系统的长期时间演化无关。）一段时间以后，李天岩(Li)和约克(Yorke)的结果被发现是早先萨柯夫斯基(Šarkovskii)提出的定理的一个特例。考虑**单峰映射** f: $[-1, 1] \to [-1, 1]$，即 $f(-1) = f(1) = -1$，f 在$[-1, 0]$区间上单调递增，在$[0, 1]$上单调递减这样的连续映射。现在考虑如下不同寻常的正整数序列：

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \ldots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \ldots$$

$$2^n\cdot 3 \succ 2^n\cdot 5 \succ 2^n\cdot 7 \succ \ldots$$

$$2^n \succ \ldots 4 \succ 2 \succ 1$$

（首先是奇数，然后是奇数乘上2，4，8，...，最后是2的乘方项按降幂排列）。萨柯夫斯基著名的定理是，如果 $p \succ q$ 且f有p阶周期点(即，$f^p x = x$ 且对于$m < p$，有 $f^m x \neq x$)，则f有周期q的周期点。特别是，当 $p = 3$ 时，我们就再现了李天岩和约克的结果。原始参考文献是 A. N. Šarkovskii, "Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself," *Ukr. Mat. Z.* 16 (1964): 61～71；乌克兰数学期刊里收入了一些优秀得令人惊奇的论文！

3. M. J. Feigenbaum, "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations," *J. Statist. Phys.* 19 (1978): 25～52；另 "The universal metric properties of nonlinear transformations," *J. Statist. Phys.* 21 (1979): 669～706。严格的计算机辅助证明的思想，见于 O. E. Lanford, "A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures," *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982): 427～434；从一维到多维的重要转变，见于 P. Collet, J.-P. Eckmann, and H. Koch, "Period doubling bifurcations for families of maps on R^n," *J. Statist. Phys.* 25 (1981): 1～14。这就允许人们处理连续时间系统，像在物理应用中发生的那样。顺便说一下，费根鲍姆标题中的**普适性**(universality)指的是重正化群方法的一个专门特征。它并不意味着总可以通过费根鲍姆周期倍化级联而达到混沌(事实上经由这个过程获得的混沌并不特别常见)。有许多**通向混沌的不同道路**；以下论文中回顾了其中一些特别重要的：J.-P. Eckmann, "Roads to turbulence in dissipative dynamical Systems," *Rev. Mod. Phys.* 53 (1981): 643～654。许多实验观察到了周期倍化级联，比较著名的是利布沙伯(Albert Libchaber)的对流研究；参看 A. Libchaber, C. Laroche, and S. Fauve, "Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement," *J. de Physique — Lettres* 43L (1982): 211～216。

4. K. Pye and B. Chance, "Sustained sinusoidal oscillations of reduced pyridine nucleotide in a cell-free extract of Saccharomyces carlsbergensis," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.* 55 (1966): 888～894.

5. D. Ruelle, "Some comments on chemical oscillations," *Trans. N. Y. Acad. Sci. Ser. II* 35 (1973): 66～71.

关于被拒的论文，在这里说上几句也许还算恰当。对于许多人来说，成功职业生涯的先决条件就是在经过评审的刊物上发表过科学论文。换句话说，委任和晋升根据已发表的论文数决定。这种情况迫使许多对科学研究既无兴趣也无能力的个人去写论文，将论文投给刊物。这就使评审人——他们本人即是从事科学研究的科学家——淹没于要求他们以此做出报告的平庸论文。由于他们有更有趣的工作要做，报告常常是草率而肤浅的。貌似有理的论文被接受，明显糟糕的论文被拒绝，而颇具创造性且不合常规的优秀论文也倾向于被拒绝。这是一个众所周知的问题，但没有人真正知道该怎么办。所幸，

存在着许多科学刊物，真正优秀的论文终将在某个地方得到发表。

6. J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, and C. Vidal, "Representation of a strange attractor from an experimental study of chemical turbulence," *Phys. Letters* 77A (1980): 391～393.

7. D. Ruelle, "Large volume limit of the distribution of characteristic exponents in turbulence," *Common. Math. Phys.* 87 (1982): 287～302.

在科学研究中，作弊(cheating)是个棘手的问题。传统观点是，作弊是些例外的现象，科研学者具有非常高的道德水准(少数例外)。但现在传统观点受到了挑战，作弊已经作为科学质量的重要因素而被公开讨论。让我简要介绍作弊发生的两个主要领域：优先权(priorities)和捏造数据(faking of data)。

优先权问题就是"谁首创的？"优先权之争的一个精妙例子，是牛顿和莱布尼兹对于谁发明了微分运算的激辩。如果你是一位凭良心工作的科学家，你会对所有你用到思想的来源表示感激(假如你都记得的话)。如果你寡廉鲜耻，你会设法把别人得到的一些结果说成是你自己的。例如，如果你在你正评审的一篇论文中发现了一个不错的思想，就设法阻止此文发表，然后以你自己的名义赶紧发表这一思想(或是叫你的一个学生去发表它)。

更加恶劣得多的是捏造数据。不幸的是，已经表明在美国生物医学研究领域，这种舞弊行为在相当大的范围内都有发生(例如，为根本不存在的病人杜撰临床记录)。出现这种舞弊的原因之一是，许多人写论文是出于职业的缘故，而对于科学真理毫无兴趣。一旦获得了资助，就一直需要取得成果。

我自己就曾经在一些可以和同行们随意交流思想的领域里工作过，也在其他一些这么做就不太明智的领域里呆过，因为那有思想会被窃取的风险。前者要令人愉快得多，且使科学得以更快地进步。

数学相对来说是没有欺诈的，因为它是这样一个广阔的领域，在其中较少有人研究任何给定的题目。捏造数据根本不会发生，而要窃取思想是非常困难的，因为那些思想都是如此的复杂。然而，总有一些优先权之争(记得牛顿和莱布尼兹)，周围总有一些可疑的角色，也没有担保说这种目前还比较令人满意的状况会永远持续下去。

12. 混沌：影响

在上一章中我提到近来有许多混沌方面的低质量工作。不幸的是，它们致使这一领域对许多科学家(包括对其早期研究做出过决定性贡献的数学家们)来说变得声名狼藉。然而，如果我们抛开毫无根据的声称，忽略大量的没用计算，还是可以看到，混沌已经给予我们一些非常有意义的结果和洞见。下面，我将讨论几个混沌应用的例子，试着从中感觉一下这些新思想的益处所在。

首先，我们记得，自从 19 世纪末阿达马的研究以来，数学家们已经了解了初条件敏感依赖性(且再不会遗忘)。然而，新的、意料之外的奇怪吸引子计算机图像——还是令专家们困惑，让他们感到有些东西值得琢磨。我真的希望可以详细阐述这一魅力无穷的论题，但所涉及的问题在这儿讨论就显得太专业了。我将再次略去一些有趣的物理学和化学专业问题的讨论。

那么，让我们回到流体运动的湍流问题。流体动力学家们希望建立一个有关*充分发展*湍流的理论：他们构造了一个充满湍流的巨大

箱子，且假设无论你观察的是一立方米还是一立方厘米的流体，看到的都是同样的东西！ 更精确地说，如果改变空间尺度，时间尺度应该发生相应的变化，从而使你看到相同的情况。 这里，（如研究费根鲍姆级联的时候一样）我们再一次碰到标度变换（scaling）的思想，该思想遍及现代物理学。 实际湍流满足标度不变性（scale invariance）吗？ 我们不知道。 但湍流有一个很好的近似理论（柯尔莫哥洛夫理论），是标度不变的。 但这个理论不可能十分正确，因为它假设湍流是均质的。 而实际上，湍流流体总是表现为相对平静背景下的剧烈涡团（所有尺度上都是如此！）。 所以，流体动力学家们一直都在寻找描述这种成团现象的正确理论。

奇怪吸引子和混沌已经阐明了湍流发生的问题，但并没解决充分发展湍流的问题。 奇怪吸引子使我们认识到任何湍流理论都必须包含对初条件的敏感依赖性。 例如，在柯尔莫哥洛夫的理论中，我们不必再去寻找模态的周期，而是要去寻找在初条件几乎相同的情况下，描述系统两个不同历史演化如何彼此分离的特征时间（characteristic times）。

根据先前洛伦茨的思想，气象学因初条件敏感依赖性的概念而获益匪浅。 实际上，按照洛伦茨的说法，一只蝴蝶的翅膀扇动一下，一段时间以后将完全改变大气的状态[这被称为蝴蝶效应（butterfly effect）]。

现在我们有了卫星云图，（如果知道风向）提前预测一到二天的天气情况是相对容易的。 更进一步，气象学家们已经建立了大气环流模型。 模型的思想是用网格划分全球，确定每个格点上某些气象参数（气压、温度等）的值，然后在计算机上模拟这些数据的时间演化。 初始数据（即某个初始时刻气象参数的值）由卫星、探空和地面观测搜

集获得。然后，计算机用这些数据、已知的山脉位置及其他许多资料，算出之后某时刻的气象参数值，当然这些预报都面临着现实的检验。结论是，大约一周后误差就大得不可接受。这可能是因为对初始数据的敏感依赖性吗？情况是这样的，如果用稍稍不同的初值再算一次，我们发现这两个计算得到的时间演化之间彼此偏离的速率与它们和自然实现的时间演化之间彼此偏离的速率大致相同。老实说，自然与计算之间的偏离比计算与计算之间的偏离还快那么一点儿。因此，模型(在计算机程序、所用格点的密度，以及初始测量的精度上)还有一些改善的余地。但是我们已经确信，我们不可能精确地提前预测一周或二周以后的天气。在气象学家们研究中，他们发现了一些可以比一般情况更精确地预报未来天气的情形(称为阻塞)。因此而得到的对可预报性的控制，无论在概念上还是实践上，都是非常了不起的成就。

或许你现在开始担心，有什么恶毒的小魔鬼会乘机利用初条件敏感依赖性，以某种难以察觉的方式，扰乱你精心安排的生活计划。现在我来估计一下这大概需要多少时间。我所用的估计方法不可避免地带有些尝试性，但和同行们的讨论显示这些估计可能不至于太离谱。

把你吸引在地球上，把地球吸引在太阳周围的万有引力，也作用在我们呼吸的空气分子之间，以及世界上其他任何粒子之间。沿用英国物理学家贝里(Michael Berry)的假设，我们的小魔鬼使位于已知宇宙边界上某处的一个电子对我们空气分子的引力作用暂停一下。你当然不会注意到任何事情，但空气分子的微小偏转正是初条件的改变。让我们将空气分子理想化为弹性小球，并仅考虑其中的一个，问多少次碰撞以后，它将会错过另一个分子，而如果遥远电子的引力

作用存在的话，它就应该碰上这个分子。贝里(根据法国数学家博雷尔早先的计算)的计算结果是，仅需要约50次碰撞![1]因此，在远远少于1秒的时间以后，空气分子的碰撞就已经变得完全不同了，但这种差异对你来说是不可见的。事情还没有完。

假设我们所考虑的空气处于湍流运动状态(你所需要的只是一点点儿风)，那么湍流对初条件的敏感依赖性将作用于小魔鬼引起的那些极其微小的涨落(fluctuations)(所谓热涨落)上，并放大它们。其净效果就是，大约一分钟以后，暂停宇宙边界上一个电子的引力作用已经产生了宏观影响：(在毫米尺度上)湍流的精细结构不再相同了。然而你仍然什么也没注意到。事情还在继续。

但是，湍流小尺度结构的变化将在不久以后导致大尺度结构的变化。其发生机制已经存在，我们可以用柯尔莫哥洛夫理论来估计所需的时间。(如前所述，这个理论不可能十分正确，但它至少可以给出合理的数量级估计。)假设我们正处于大气的湍流部分(风暴就很理想)，那么我们可以料想，几个小时或一天以后，小魔鬼那个令人难以察觉的阴谋将会引起大气湍流在千米尺度上的变化。现在这是完全可见的了：云的形状、风的阵发形式都变得不同。但你或许会说，这并不能真正改变你精心安排好的生活计划。那么接着再看。

按照大气环流的观点，目前小魔鬼所完成的仍然只是初条件不怎么显著的改变。但是我们知道，只要几周以后在全球范围上都将发生变化。[2]

那么，假设你准备周末和爱人(或老板，我无所谓)去野餐。正当你往草地上铺桌布的时候，一场由小魔鬼小心控制初条件而导致的可恶冰雹开始了(啊，这个小魔鬼是个女孩儿)。你精心安

排的生活计划也许就此改变了。现在，你满意了吧？事实上，小魔鬼想要让你将乘坐的飞机失事，但体谅到与你同行的那些乘客们，我劝阻了她。

让我们回到混沌在自然科学中的应用。你知道地球具有能作用于磁针的磁场。地球磁场有时会改变它的极性，因此，就有磁北极靠近地理南极或反之的周期。地球磁场的反转以百万年量级为间隔尺度不规则地发生。（我们所以知道这些反转，是因为它们被某些可以确定年代的喷发岩的磁化记录了下来。）地球物理学家认为，地球内部对流所引起的物质运动维持了电流，从而通过类似于发电机机制的发电机制，产生了所观测到的磁场。但问题是这个奇怪的发电机具有混沌的时间演化，它导致了大量历史记录所证实的不规则磁极反转现象。不幸的是，我们还没有一个使这种混沌解释十分有说服力的好的理论。

混沌的一个相当美妙又令人信服的应用，是天文学家威兹德姆(Jack Wisdom)关于火星和木星之间小行星带上空隙的研究。小行星带由许多围绕太阳运动的小天体组成。但是在离太阳的某些距离上却没有小行星，有空隙。这些空隙已经困扰了天体力学的研究者们很长时间。大多数在某类共振(resonance)的基础上可以预测空隙正确位置的理论，也会预测到根本不存在的其他空隙。基于仔细的计算机研究提出的解释似乎是：位于共振区的小行星具有混沌变化着的轨道形状。如果它使小行星进入火星围绕太阳运动的区域，并发生碰撞，那么小行星就不复存在了。这样，一些共振区就被掏空，变成空隙，而另一些则没有。是否成为空隙，只能在详细的计算机演算基础上决定。[3]

现在，我们暂时转而讨论生物学。这是一个能够看到各类振荡

的领域：如早先提到过的派伊和钱斯实验中的化学振荡、昼夜节律（日间活动和休息时间的交替）、心脏搏动、脑电波等等。近来对动力系统的兴趣已经激励起许多方面的研究，但是生物学实验可以达到的精度比物理学或化学实验的要低得多，因而解释也就不太可靠。如果混沌出现，它有用吗？抑或只是显示病理的征兆？两种思想都是由有关心脏搏动的研究提出的。将生物学系统当作动力系统来研究显然是个好主意，在这个方向上已经取得了一些优异的成绩。但还是存在许多不令人信服的工作，看来我们只能等待生物学混沌（biological chaos）方面坚实结果的出现。

让我用一些可以解释存在于生物学、生态学、经济学以及社会科学中的混沌研究困难的一般性考察来结束本章。在某个系统中定量地研究混沌，要求对该系统动力学的定量认识。这种认识通常基于对可以在计算机上予以精确积分的基本演化方程的充分认识。这是太阳天文学、流体力学，甚至气象学所达到的状况。而在其他一些情况下，如振荡化学反应，我们不知道基本运动方程，但我们可以将系统当作一个时间函数进行监测，得到非常精确的长时间序列（long time series）。如果这个时间序列足够简单（振荡化学反应是这样的，但气象学不然），我们可以从该序列出发，重构系统的动力学特性。我们不知道生物学和“软”科学中的基本运动方程（仅有与数据定性一致的模型是不够的），并且，很难获得非常精确的长时间序列，动力学特性通常又不简单。此外，在许多情况下（生态学、经济学、社会科学），不管它们的基本演化方程是什么样，随时间的变化都非常缓慢（系统在“学习”）。因此，对于这些系统而言，混沌的影响目前仅仅处于科学哲学（scientific philosophy），而不是定量科学（quantitative science）的水平上。[4]但是进步是可能的：要知道庞加莱

在气象学可预报性方面的想法只是科学哲学，而这一领域现在是定量科学。

注　释：

1. M. Berry, "Regular and irregular motion," in *Topics in Nonlinear Dynamics*: *A Tribute to Sir Edward Bullard*, ed. S. Jorna (New York: American Institute of Physics, 1978), pp. 16～120。贝里的计算(pp. 95～96)是基于博雷尔和奇里科夫(B. V. Chirikov)早些时候的思想。什么是一个遥远的物体对两个弹性小球间碰撞的引力影响呢？如果一开始这两个小球离开那个物体的距离不相等，那它们被转向的程度将不一样，而那个物体是否存在将使碰撞的几何特性稍稍有些不同。观察一个给定的小球，我们发现这种差异在后来的碰撞中指数地放大。（它不是如我们在第7章中的简化讨论那样以2为底放大，而是以像 l/r 这样的值为底的，其中 l 是一个球飞行的距离，r 是它的半径。）n 次碰撞后，原始轨道和修改过的轨道之间的夹角变得与1量级相当，它们彼此之间不再有任何相互的影响了。

如果那个遥远的物体是 10^{10} 光年以外的一个电子，弹性球是(常温常压下的)氧分子，那么 $n = 56$。如果是离台球桌1米的一个人对作为弹性球的台球作用，则 $n = 9$。这当然是根据经典力学得到的结论。量子效应早就使一个氧分子对另一个氧分子哪怕就一次的准确瞄准变得不可能了($n = 0$)。对于台球，量子效应使 $n = 15$。（因此，在我们的讨论中引用量子力学比引用经典力学更合理一些，但对于接下来的内容来说，这真的没有什么区别。）

2. 前面的注释中提到的贝里的计算，显示出初始时刻一个微小的偏离会在很短的时间内彻底改变空气分子间碰撞的结构。那么，空气的微观结构和其中发生的涨落就会变得完全不同。这些所谓的*热涨落*(thermal fluctuations)会影响(分子数量并不太大的)空气中少量的那些元素的密度、速度等等。我们可以估算湍流流体中的热涨落被初条件敏感依赖性放大到宏观尺度(比如1厘米)所需要的时间。计算用到柯尔莫哥洛夫的湍流理论。这个理论(基于量纲分析)给出了扰动增长率在本质上唯一的值[增长的特征时间与所选宏观尺度涡旋的*变形时间*(turnover time)成正比]。湍流中从微观涨落到宏观变化，大约需要一分钟时间(参看 D. Ruelle, "Microscopic fluctuations and turbulence," *Phys. Letters* 72 A [1979]: 81～82)。湍流从小尺度到大尺度的过程所用的时间与所考虑的最大涡旋的变形时间成正比(再一次用到了柯尔莫哥洛夫理论以及量纲的观点)。我们估算到达千米尺度要用几个小时或一天的时间。现在，我们转入全球大气环流的层次，在其中气象学家估算将一个小的变化放大到全球都有所不同的状况要1～2周的时间。（有关气象学问题的讨论，请参看 M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, eds., *Turbulence and Predictabiliity in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* [Bologna: Soc. Ital. Fis. (and Amsterdam: North Holland), 1985]。）

上述估算对细节相当不敏感(因为所估算的时间是对数的，或是基于量纲观点，并且因为最大时间得自于最大的尺度)。因此，即便人们可能怀疑例如柯尔莫哥洛夫湍流理论的运用，另一个理论也不太可能给出非常不同的结果。

3. 参看 J. Wisdom, "Chaotic behavior in the solar system," *Proc. Royal Soc. London* 413 A (1987): 109～129。每个小行星都以椭圆形轨道围绕太阳旋转，但由于巨大行星木星的吸引，椭圆的形状发生缓慢变化。这些形状上的变化对于到太阳的某种共振距离，或者更精确地说，对于椭圆半长轴的某些值来说，是非常重要的。（据开普勒第三定律，半长轴与公转周期相关联，而当小行星的公转周期与木星的公转周期共振时，这颗行星有很强的摄动效应；当这两个周期有比值 p/q，其中 p 和 q 是很小的整数时，我们说它们之间发生共振。）计算机研究表明，在共振的情况下，存在着小行星轨道形状(即椭

圆短轴和长轴间的比值)随时间混沌地变化。当这些变化使小行星能够穿过火星的轨道时，小行星就由于碰撞而消失，从而在小行星带上形成了一条空隙。因此，计算结果证明了一些共振对应于空隙，而一些则与空隙无关的观测事实。

4. 将定量方法应用于生物学和软科学中的早期尝试都是过分乐观的。特别是，人们以为许多自然产生的吸引子的维数能够通过所谓格拉斯贝格尔-普罗卡恰算法(Grassberger-Procaccia algorithm)的方法而得到(P. Grassberger and I. Procaccia, "Measuring the strangeness of strange attractors," *Physica D* 9 [1983]: 189~208)。这种方法对于好的长时间序列很有效，但对于短序列却会产生令人误解的结果(D. Ruelle, "Deterministic chaos: the science and the fiction," *Proc. Royal Soc. London* 427 A [1990]: 241~248)。另一个显得非常有前途的思想，见于 G. Sugihara and R. M. May, "Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series," *Nature* 344 (1990): 734~741。

13. 经　济　学

如上所述，混沌是自然现象中相当普遍的特征。因此，我们应该至少定性地表明它在经济学、社会学以及人类历史中的作用。这些学科确实向我们提出了一些比小行星带空隙、甚至比天气预报更具重要性的问题。但对这些问题的分析必然会有些模糊和定性。为了给这样的分析做准备，我们现在回顾几个原则性的问题。

首先，回到上一章中那个小魔鬼的阴谋，你可能担心，暂停粒子间的引力作用是十分不可能的，即便是不到一秒钟的时间，或它们相距得非常远。你可能还担心，我们所生活的世界或许是唯一可能的世界，如果对它作任何的改变都将是该遭天谴和难以想像的——这根本毫无意义。只要你记住我们所讨论的只是我们世界的一个理想化，所有这些担心就都会消失。在这个理想化描述中，一个小得出奇的变化在几周以后将导致重要的影响。即使你坚持这种说法对“现实世界”毫无意义，但它确实说出了一些关于我们对现实世界的演化过程施以智力控制的东西。

混沌会在什么样的系统中产生？ 假设你对所选用的系统已经虚拟了一个理想化的时间演化。 你怎么知道它具有初条件敏感依赖性呢？ 如果你的理想化描述足够清晰以至于能够在计算机上运行，你就应该想尽办法让它在计算机上运行，看是否出现混沌。 除此之外，对于混沌的出现只有非常含糊的判据。 为了描述这些判据，让我们回去看一下前面讨论过的模态绘景。 如果我们有几个模态，相互独立地振荡，那么这种运动，如上所述，就不是混沌的。 现在假设我们在这些不同的模态之间加上耦合(coupling)或相互作用(interaction)。 这就意味着，每个模态或振荡器在某个时刻的演化不仅由这个振荡器在那个时刻的状态决定，而且还由其他振荡器的状态决定。 那么，我们什么时候才能得到混沌呢？ 嗯，对于初条件敏感依赖性的出现，**至少需要3个振荡器**。 而且，**振荡器越多，它们之间存在的耦合越多，你看到混沌的可能性就越大**。

一般而言，对于我们所考察的这类动力系统(连续时间系统)，混沌时间演化只能发生在至少3维的空间中。 这是一个定理。 而且，在独立系统之间引入相互作用使混沌出现的可能性变得更大，特别是耦合强的时候(但不能太强)。 这显然是一个含糊的说明，但在实际中非常有用。

这里还有一点是读者应该仔细考虑的。 虽然一个系统可能显示出对初条件的敏感依赖性，但这决不意味着关于该系统的每件事都是不可预测的。 事实上，在混沌的背景下找出什么是可预测的，才是真正深刻而重要的问题。(这就意味着，非常遗憾，这个问题还未得到解决。)在处理这个深刻而重要的问题时，由于缺乏更好的方法，我们将使用常识。 特别应该注意，生物体具有通过调节机制来适应环境中变化的非凡能力。 因此，比起在它们环境中出现的混沌所给

出的暗示，人们应该能够对它们做出更好的预测。例如，我能够预测你的体温大约是 37 ℃，不会太低，也不会太高，否则你现在就不能读这本书了。

最后一个一般性的说明：混沌的标准理论处理的是一再回去靠近它们的早先状态的时间演化。呈现这种“不断返回”的系统通常只是适度复杂的。与其相反，非常复杂系统的历史演化是典型的单行线：历史决不会重复自身。对于这种单向演化的非常复杂系统，通常显然存在初条件敏感依赖性。那么问题在于，它是否受到调节机制的约束，或是否导致长期的重要后果。

现在让我们大胆地转到经济学，看看我们是否能够分离出有趣的时间演化：适度复杂的和可能是混沌的。按照动力系统思想去考察一个经济发展的方案，然后批判地讨论我们的结果，这将是很有启发性的。我们的方案，与受制于各种不同强度的外力的耗散物理系统相平行，力图表现某个社会在各个技术发展阶段的经济状况。例如，这个耗散系统可以是一层从下部加热的黏性流体，而外力的强度就是加热的温度大小。我们当然只是期望经济系统和物理系统之间在定性上的相似性。

在技术发展的低水平阶段，经济应该处于一种定常状态，相当于从下面微弱加热的流体层的定常状态。（定常状态是和时间无关的——即，从动力学观点来看，它是相当迟钝的状态。）在技术发展（或加热）较高水平的阶段，我们可以期望周期振荡出现。事实上，经济循环，也称为商业循环，已经被观测到了，且大致上是周期性的。在更高的技术发展阶段，我们可以看到两个或多个不同周期的叠加，而经济分析家们确实看到了这种情形。最后，在足够高的技术发展阶段，我们可以看到带有不规则变化和初条件敏感依赖性的湍

动经济(turbulent economy)。 人们可以说，我们现在就生活在这种经济阶段。

相当有说服力，不是吗？ 定性上说，是这样的。 但是，如果试图进行定量分析，我们立刻就会发现，经济的循环和其他涨落是在增长的一般背景下进行的：存在着我们不可忽略的单向历史演化。 商业循环也有它们的历史特征：每一次都不同；它们不是同一些动力学现象的完全无变化的重复。 如果人们想要提到经济现象的某个动力学解释，就会想起凯恩斯(John M. Keynes)和他的追随者们的思想。 然而，大多数经济学家现在都得承认，这些有趣的思想没有什么重要的预测价值。 换句话说，经济(特别是宏观经济)不能作为适度复杂的动力系统进行令人信服的分析，即使它具备这种系统的某些特点。

尽管如此，我认为我们的方案并非完全错误，它不是仅仅只有隐喻价值。 问题是我们没有用到动力系统的微妙属性，而只用了一些粗浅的(robust)基本事实。 一个基本事实是，一个复杂系统(即系统由几个强相互作用的子系统组成)比一个简单系统更有可能出现复杂的时间演化。 这一事实应该适用于经济系统，而技术发展就是表现复杂性(complexity)的一种方式。 另一个基本事实是，最简单类型的时间演化是定常状态：不存在时间依赖性；系统保持同样的状态。如果我们假定“不断返回”，则第二简单类型的时间演化，是由周期振荡组成的。 然后是两个或多个振荡(或模态)的叠加，最后是混沌。 在去除一般增长的背景以后，人们可以希望这些观点适用于经济系统。 因此我们的方案，尽管几乎没有什么定量价值，也许在定性上还是合理的。 现在我们来考察它的后果之一。

经济学的一条至理名言是：遏止经济障碍，建立自由市场，对人

人都更有好处。 假设国家 A 和国家 B 都生产牙刷和牙膏以供本国使用。 并假设国家 A 的气候更适合牙刷增长，且其产量比国家 B 的更有利可图，而国家 B 拥有丰富的优质牙膏资源。 那么，如果建立了自由市场，国家 A 和国家 B 都将为了人人的利益而各自生产廉价的牙刷和牙膏，然后相互买卖。 更一般地，经济学家们指出(在一定假设下)自由市场经济将给各种商品的生产者提供使其利益某种程度最优化的均衡状态。 但是，如上所述，各种地域经济耦合在一起得到的复杂系统(complicated system)，比起稳定到某个便利的均衡状态，更可能具有一个复杂的混沌的时间演化。(专业上说，经济学家们允许均衡是一种依赖时间的状态，但不允许有不可预测的将来。)回到国家 A 和 B 的问题，我们看到，把它们的经济连接在一起，并与其他国家 C、 D 等等的经济联系，可以产生足以损害牙刷和牙膏工业的动乱的经济振荡，从而造成了无数的龋洞。 所以，混沌也是使经济学家头痛的诸多因素之一。

让我把事情说得更残酷些。 经济学教科书主要关注具有完美预见力的经济动因间的均衡状况。 教科书给你的印象就是，立法者和政府官员的作用是找到并实施一种对社会特别有利的均衡状态。 然而，物理学中混沌的例子教导我们，某些动力学状态不产生均衡，而产生混沌的不可预测的时间演化。 因此，立法者和政府官员就面临着这样的可能性：他们原本想产生一个更好的均衡状态的决策，事实上导致了可能具有相当灾难性后果的混乱而不可预测的涨落。 现代经济的复杂性促进了这种混沌行为的产生，而我们对该领域的理论认识却仍非常有限。

毫无疑问，(从学术意义上说)经济和金融给了我们混沌和不可预测行为的许多例子。 但要想多说些什么很困难，因为在这里我们没

有物理学家喜欢进行实验的那种受到仔细控制的系统。经济学家称之为冲击(shocks)的外部事件是不能被忽略的。怀着分离出一个适度复杂动力系统的希望，人们曾经想方设法去分析了一些金融数据(众所周知，其精度比经济数据的更高)。在我看来，这种希望已经破灭了。因此我们被置于如此焦躁不安的情况之下：我们看到时间演化在某种意义上与混沌的物理系统相类似，但又足够地不同，以至于我们目前还不能分析它们。[1]

注　释：

1. 有关经济和混沌的论文集，请见 P. W. Anderson, K. J. Arrow, and D. Pines, eds., *The Economy as an Evolving Complex System* (Redwood City, Calif.: Addison-Wesley, 1988)。在使这些文章结集成书的这次会议上，云集了经济学家和物理学家。有趣的是，经济学家在他们的报告中通常显得比物理学家还要谨慎。另见第 12 章的注释 4。

14. 历史的演化

混沌的思想最自然地适应用于“不断返回”(eternal return)的时间演化。这些是一次又一次返回而接近同样状态的系统的时间演化。换句话说，如果系统在某个时刻处在某个状态，它会在以后的时刻里返回，任意接近这同一个状态。

不断返回是你在适度复杂的系统，而不是在非常复杂的系统中能够看到的现象。让我设计一个实验来证明这一点。捉一只跳蚤放在一块特别的跳棋盘上，用一个栅栏防止它从棋盘中逃走。你的跳蚤将四处乱跳，过了一会儿，它会再一次跳到开始的地方。这就是一个适度复杂系统的例子。现在捉100只跳蚤，并用名字或数字来标记它们。在棋盘的每个格子中放一个跳蚤并观察它们。多长时间以后，所有跳蚤会同时回到它们开始时的那个格子中呢？直觉(和计算)表明，所需的时间如此之长，以至于你永远也不可能再看到这种情况发生。你也无法看到所有的跳蚤同时回到它们先前任何时刻同时占据过的位置：在任何合理的观察时期内，你都不可能看到跳蚤再

次出现同样的构形。

如果你没有100只跳蚤任你支配，就对这个实验做一个计算机模拟。你可以对跳蚤四处跳跃的方式做出合理的假设。然后你可以就你的结果写一篇学术论文，题为“不可逆性的一个新理论”之类。如果你打算把它投到某个物理学期刊上发表，千万别羞怯。大胆地以“我们发现了不可逆性的一个新奇机制……”之类的话开始你的文章，并且把它投到《物理评论》上发表。当然他们会拒绝它，寄给你三个评审人报告的复印件，说它是垃圾，并解释为什么。别气馁；考虑评审人的意见把你的文章重写一遍，再投出去，同时附上一封适度表现愤慨的信给编辑，指出不同评审人报告之间的矛盾。你的论文被这样寄来寄去好几次，逼得那些评审人发疯，它就会被发表在《物理评论》上了，而如果你还不是一位物理学家，从此以后，你就是了。

让我们现在回到不断返回。为什么“不可逆性”这个词突然冒出来了呢？嗯，尽管你喜欢不断返回的思想，但日常生活仍然充满着失望：汽车撞坏了不能恢复，人变老了不再年轻，而一般说来现在的世界不同于以往的世界。总之，事物总是不可逆的。部分的解释在于：如果系统是充分复杂的，返回到已经访问过的状态附近所需的时间是很长的(想想在棋盘上的100只跳蚤)。因此，如果你只用适度的时间来观察系统，不断返回是不相干的，你最好还是选择另一个理想化。

例如，假设你回去看那100只跳蚤，把它们全部放在棋盘中的同一个格子上。这些跳蚤会急不可待地开始四处乱跳，很快就占据了整个棋盘。因此，你可以提出一种理论：跳蚤有均匀占据它们所能达到空间的趋势。这是一个相当好的理论，不管不断返回，也不管事实上

跳蚤对均匀占据棋盘毫无兴趣。它们所有的愿望就只是四处乱跳。

如果我们现在来考察我们周围的这个复杂世界，考察生命的演化，考察人类的历史，我们就不应期望看到不断返回。不断返回可以适用于世界的部分方面，适用于小的子系统，但不适用于整个绘景。整个绘景遵循单向的历史发展，而对于它，我们并没有有用的数学理想化。（虽然我们有一些有趣的思想，这在下文将会讨论。）现在让我们回到本书的主要论题——机遇。我们将试着估计，像前面章节提到过的那个小魔鬼所造成的影响那样，小得出奇的变化到底可能在多大程度上改变世界的历史发展。有几个应该仔细讨论的问题，我们将逐个考虑。

如上所述，我们的小魔鬼毫不费力地改变了天气，把花粉和种子吹送到四面八方。因此，个体植物的命运很大程度上是受机遇决定的。那么，动物又怎样呢？嗯，（我希望你知道，）动物诞生的过程和多得难以置信的小小精子有关，但只有它们中的一个经过某种竞争，最终与雌性配子结合。我让你独自考虑这个问题的细节，但我认为你会得到一个令人沮丧的结论。即，仅仅因为那个小魔鬼的操纵，你已经被创造出来了，而不是你的哪个带着有点儿不同基因的小弟弟或是小妹妹。

但是即使个体之间都是不同的，全局绘景仍然可能基本相同。我们也许能够精确地预测，在某种气候条件下的某种土壤能够使橡树生长成林，尽管我们不能预测每棵树的位置。简言之，存在许多种生物调整机制、演化趋同和历史必然性，它们都努力抹去由我们那个小魔鬼组织起来的偏离。这些机制是怎么成功的呢？它们是否导致历史决定论，即导致在大群个体的历史这一层次上的决定论？

或许谈论部分历史决定论较好，因为某些“机遇事件”的结果，

像我们那个小魔鬼所能组织起来的那种，是不能在以后的演化中被抹去的，而似乎被永久地保留了下来。让我们看一个例子。所有已知的活的生物体都是相互关联的，且基本上分享着相同的遗传密码。具体地说，遗传信息被写成一个符号(或“碱基”)序列，这些符号是一个四字母字母表中的元素，每连续三个碱基组成的一组就是蛋白质的一个给定构件(即氨基酸)的编码。从碱基三联体到20个不同氨基酸的编码是任意的。如果生命在另一个行星上独立地演化，无人会期望其使用同样的遗传编码。活的生物体的结构经过演化，通过突变和选择过程，已经变化了很多，但遗传编码是如此基本，以至于从细菌到人类基本上保持着同样的形式。大概，在生命踌躇的第一步，就有了遗传编码的演化。在某个时候，当有效的系统演化出来时，它就消灭了竞争者，独自存活了下来。

这是一个任意特征如何可以被历史演化所选择并永远保留下来的例子。还有其他一些例子。特别是，技术发展显示了许多这样的情况，相当偶然地做的选择后来却有了基本上不可逆的长期后果。阿瑟(Brian Arthur)[1]讨论过许多这样的情况。例如，他提到，早期的汽车既可以由内燃机，也可以由蒸汽机发动，两者都不相上下地成功。由于供给蒸汽机汽车的水的一次偶然短缺，蒸汽机就开始落后，所以内燃机从更多的技术改进中获利，渐渐取代了蒸汽机。要证明这样一个理论还有些困难，但阿瑟的基本观点无疑是正确的：两项处于竞争状态的技术，如果其中一项略微领先，它就会从更多的研究和开发中获利，或许很快就消灭了另一项。(这听起来像是初条件敏感依赖性，虽然在数学上它是不同的东西。)更一般地说，这样的事情是很显然的：非常随意的一些决定，像汽车靠右而不是靠左行驶，是不容易被改变过来的。

因此，历史决定论必须被修正，(至少)提到某些历史上不可预测的事件或选择会造成重大的长期影响。我想事实上还有更多的东西可以说。我认为，**历史有系统地产生出一些会有重大长期影响的不可预测事件**。我们确实还记得，重大决定常常是由个别政治领导人作出的。许多情况下，这些政要们的行动在当时的压力下是完全可预测的。但如果他们有才智，依理性行事，博弈论(如第6章所述)常常会迫使他们在作决定的时候加进随机因素。当然，不是每种随机行为都是合理的，但合理的行为在某个特殊的情况下却常常都是随机的。因此，当依着理性作出造就历史的决定时，就涉及到了随机而不可预测的因素。

这不等于说，美国总统能够向国会解释，他通过掷硬币作了一个重要的决定。也许他就是这么做的，也许这才是合理的做法，但他不得不去另找一个说法，解释说无论如何都没有其他任何合理的选择可以取代他的决定。以前，政治和军事领导人不大受到约束，他们乞求神谕，这就在他们的决定中引入了不可预测的因素。应当承认，盲目信任神谕是愚蠢的，容易造成灾难性的后果。但是，有才智的领导人巧妙地利用神谕的不可预测性，也许就得到了一个达到最优概率策略的好方法。

注　释：

1．W. B. Arthur, "Self-reinforcing mechanisms in economics," pp. 9～31 in *The Economy as an Evolving Complex System*(第13章的注释1中提到了这本书)。

15. 量子：概念框架

我们刚刚用了几章来讨论对初条件的敏感依赖性和混沌。 为了讨论的方便，我们用到了物理实在的某种理想化，即主要由牛顿创立的所谓经典力学。 我们还几次提到有一个更好的理想化，即量子力学，它是由普朗克(Max Planck)、爱因斯坦、玻尔(Niels Bohr)、德布罗意(Louis de Broglie)、玻恩(Max Born)、海森伯、薛定谔和其他一些人开创的。 对于实在的某些方面(主要处理像原子这样的小系统)，经典力学是不合适的，必须要用量子力学来代替。 但对于日常生活来说，牛顿力学就足够好了。 因此，并不需要在那个层次上对我们有关混沌的讨论作什么修正。

世界的量子力学描述在哲学上的重要意义是：机遇在其中起着至关重要的作用。 我将试着说明这是怎么回事。

量子力学和其他物理理论一样，由以下两个部分组成：一个是数学部分，一个是告诉你如何用数学来描述某一片段的物理实在的操作部分。 量子力学的数学和操作方面都是直截了当的，不涉及任何逻

辑悖论。而且，理论和实验之间能够和我们所能期望的一样完全吻合。然而，这个新的力学引起了涉及到它的概率方面，它的操作概念与经典力学的操作概念之间的关系，以及所谓波包坍缩等问题的许多争论。这些争论从某种程度上说仍在进行，并且涉及到的数学专业特征更使讨论复杂化。

如果你还没有上过一门量子力学课，或即使你已经上过，我推荐你读一下费恩曼(Richard Feynman)的一本名为《QED》[1]的小书。书中没有用到专业的数学，却尽可能多地讲述了这一学科的概念构造。这里，我将更加谦虚一些，仅仅给出这一理论的骨架。这个骨架不是非常有趣的：在读下面几页时，请鼓起勇气，并尽量要表现得不屈不挠。

还记得，在经典力学中位置和速度是我们的基本概念，牛顿定律告诉我们，位置和速度是如何随时间演化的。我们也讨论了概然性理论，其中基本的研究对象是概率，我们已经建立起一系列规则，规定了这些概率如何随时间演化。量子力学的基本研究对象叫做**振幅**(或**概率幅**——我们马上就会看到为什么是这个名字)。这些振幅是复数而不是通常所用的实数。[2]量子理论的数学部分规定了振幅如何随时间演化；这个演化方程称为薛定谔方程。这是相当简洁明了但数学上相当专业的一个问题，这里我们仅能在注释中给出一些讨论。[3]注意，振幅的演化是确定性的。量子理论的数学部分还包括所谓**可观测量**的研究对象。用专业术语来说，它们都是**线性算子**(linear operators)，而它们的抽象特征都给第一次使用它们的物理学家留下了非常深刻的印象。最后，给定一个可观测量——称为 A——和一个振幅的集合，人们能够计算出一个称为是 A 的**平均值**的数，我们将用 $\langle A\rangle$ 表示。[4]

综上所述，量子力学告诉我们如何计算振幅的时间演化，然后如何用这些振幅得到可观测量 A 的平均值 $\langle A\rangle$ 。

我们如何将这些数学概念与物理实在联系起来呢？ 让我们举一个特例，并假设你是一个实验粒子物理学家：你喜欢将粒子加速到具有很大的能量，将它们对准目标，看有什么结果。 你已经在目标周围放置了一系列监测器Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ等等，当一个恰当类型的粒子在一个恰当时刻打中它们时，这些监测器就会发出“咔哒”声来示警。（“恰当类型”意味着恰当的电荷，恰当的能量等等。 “恰当时刻”意味着，例如，只有当Ⅰ示警以后，监测器Ⅱ才被激活，且激活的状态仅保持一定的时间间隔。）你决定称监测器Ⅰ和Ⅱ都示警了，而Ⅲ没有的这种情况为事件 A。（事件 A 是你在实验中期望看到的那种特殊类型碰撞的标记。）

你现在去查阅量子力学的圣经，它们会告诉你哪一个可观测量与事件 A 相对应。（也就是说，事件被看作是一种特殊类型的可观测量。）它们还会告诉你，如何计算与你实验相关的振幅。 然后你就能够估计 $\langle A\rangle$ 。 量子信念的一个基本信条是，$\langle A\rangle$ 是你能够看到事件 A 的概率。 特别地，如果你大量地重复实验，所有监测器都按要求示警的那种情况所占的比例就是 $\langle A\rangle$ 。 这是联系量子理论的数学和操作上定义的物理实在之间的纽带。

让我顺便提一下，量子力学圣经的某些章节还没有写出来，或仅仅是尝试性的。 换句话说，我们还不能确切地掌握粒子间相互作用的所有细节，这也就是实验仍在进行的原因。

后面我们将尝试发展一些量子力学的物理直觉，但刚刚展示的简要描述对于讨论基础性的内容来说，已经足够了。 让我再把上述框架重复一次：正在进行着一个物理过程(例如粒子间的碰撞)，我

们通过做一些测量来研究它(例如用监测器)。测量的全体代表一个事件，量子理论使我们能够计算出事件的概率。(关于测量，没有什么神奇的：如果想了解在一个监测器里发生了什么，你可以用其他监测器来监测它，然后用量子力学加以分析。)这样我们就得到了对世界的又一种描述。它与经典力学所给出的描述截然不同，但完全一致。

如果你要说量子力学是确定性的，那么它就是的：薛定谔方程不含糊地预言了概率幅的时间演化。如果你要说量子力学是概然的，那么也可以：它仅有的预言是关于概率的。(这概率偶尔会是 0 或 1，由此你就有了确定性，但情况通常不是这样的。)

要说量子力学是概然的，它也不是第 3 章所讨论的通常意义下的概率论。特别地，当事件"A"和事件"B"都以通常的概率论定义了，那么事件"A 与 B"也已经定义好了(直观的含义是，如果"A"发生且"B"发生，则"A 与 B"发生)。量子力学中"A 与 B"通常没有定义：在量子力学的圣经里不存在"A 与 B"这一条目。当然，这非常令人气愤：为什么我们只是说，如果"A"发生且"B"发生，则"A 与 B"发生，都不行呢？对这个问题，有两种回答——数学上的和物理—操作上的。物理上发生的情况是，(一般)你无法挑选出监测器去同时测量"A"和"B"(即，如果"A"发生且"B"发生，你不能同时监测它们)。你可以尝试先测量"A"，后测量"B"，或是先测量"B"，后测量"A"，但你会得到不同的答案！这就是常常所说的第一次测量干扰了第二次测量。这种直观的解释并不真的错了，但它容易引起误解：它暗示事件"A 与 B"事实上是有意义的，但我们太笨拙了以至于不能测量到它。然而，量子理论的数学不含糊地指出："A 与 B"通常没有

意义。这涉及可观测量 A 和 B“不对易”的事实，更多的细节在注释中给出。[5]

所有这些有关事件的讨论都有点儿抽象。关于一个粒子在一条直线上运动，我们能说些什么呢？按照经典力学，我们所希望知道的一切就是它的位置 x 和它的速度 v。在量子力学里又是怎样的呢？假设你的粒子是用一定的概率幅描述的。通过考察事件“x 在这儿”，“x 在那儿”，你可以确定在各种位置上找到这个粒子的概率。（这时，关于 x 的各种事件是对易的可观测量，你可以同时观测它们。）让我们归纳你的结果为这粒子在 x_0 附近，但在它的位置确定上有一个不确定量（或可能误差）Δ_x。同理，你可以归纳粒子速度的概率描述为接近 v_0，但有一个不确定量 Δ_v。如果粒子用 Δ_x 和 Δ_v 都是零的概率幅描述，那么它的位置和速度就都被完美地定义了。但这是不可能的，因为“x”和“v”是不可对易的可观测量，海森伯在 1926 年证明

$$m\Delta_x \cdot \Delta_v \geqslant h/4\pi$$

其中 m 是粒子质量，$\pi = 3.14159\ldots$，h 是一个非常小的量，叫做**普朗克常量**。上述不等式就是著名的海森伯不确定关系。它生动地显示了量子力学的概率特征。

但是，如上所述，量子力学不是普通的概率论。物理学家贝尔（John Bell）指出，附属于某个简单物理系统的概率满足一些事实上与普通概率描述不相容的不等式。[6]贝尔的成果表明了量子力学与通常的直觉离得有多远。

当然，有过一些把量子力学向经典思想靠近的英勇努力[特别是物理学家玻姆（David Bohm）所做的工作]。这些努力是值得尊重和

必要的。但所获得的成果涉及一些不太自然的建构，仍不能令大多数物理学家信服。把量子力学向通常的直觉靠近的努力之一，已经找到它通向量子力学圣经的道路……也已经引起了许多的麻烦。这就是波包坍缩(Collapse of Wave Packets)的神圣信条。它涉及两个可观测量 A 和 B 的相继测量，并建议在 A 的测量之后和 B 的测量之前给出概率幅是什么。

但这个信条导致了一些困难，最好先放在一边。(从物理学的观点来看，它所有的全部价值就是你可以估算有关“A 然后 B”的概率了。)

最近，出于对写量子力学圣经的开国元勋们的尊重，物理学家们已经有了远离波包坍缩的趋向。例如费恩曼在他的书《QED》中，只是在一个简短的脚注中，仅仅为了说明他不想听到关于它的事情，而提了一下这个话题。[7]

注　释：

1. R. P. Feynman, *QED* (Princeton: Princeton University Press, 1985)。费恩曼对量子力学的表达与我们将要讨论的更加传统的表达有些不同，但原则上它们是等价的。

2. 记得复数是具有以下形式的一种数学对象：$z = x + iy$，其中 x 和 y 是实数(诸如 1.5，或 π，或 -3)，并且 i 的平方 $i^2 = i \times i$ 是 -1。人们用复数进行运算，其方法与实数运算基本相同。z 的复共轭是 $\bar{z} = x - iy$；容易验证 $z\bar{z} = x^2 + y^2$，且人们写 $|z| = z\bar{z}$ 正的平方根。比起实数来，复数有点儿不那么直观，但更有专业优势。例如，复数总有(复的)平方根。

3. 本条以及以下两条注释，对量子力学进行了一个简略的综述。

薛定谔方程

记得牛顿方程为(第 5 章注释 1)

$$m_j \frac{d^2}{dt^2} x_j = F_j \quad (j = 1, \ldots, N)。$$

我们假设存在一个关于 $x_1, \ldots, x_N$ 的函数 V(称为势函数)，形如

$$F_j = -\operatorname{grad}_{(j)} V,$$

其中 $\operatorname{grad}_{(j)}$ 是关于第 j 个粒子的位置 x_j 各分量的导数向量。(在引力相互作用的情况下，我们有

$$V(x_1, \ldots, x_N) = -\gamma \sum_{j<k} \frac{m_j m_k}{|x_k - x_j|}。)$$

在量子力学中，振幅 $\Psi(x_1, \ldots, x_N; t)$ 代表（t 时刻）在位置 $x_1, \ldots, x_N$ 上找到我们的 N 个粒子，并且振幅 Ψ 形成所谓的波函数（wave function）。Ψ 的时间演化由求解薛定谔方程得到

$$\frac{\mathrm{i}h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\sum_j \Delta_{(j)}\Psi + V\Psi,$$

其中 i 是 -1 的平方根，h 是某个常量（普朗克常量），$\Delta_{(j)}$ 是关于 x_j 的拉普拉斯算子，即 $\Delta_{(j)}\Psi$ 是 Ψ 关于 x_j 各分量的二阶偏导数之和。

假设 $3N$ 维积分

$$\int |\Psi(x_1, \ldots, x_N; t)|^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N = 1$$

对 t 的一些值成立，则这一特性对所有 t 均成立。

4. 将线性算子 A 作用于自变量为 $x_1, \ldots, x_N$ 的函数 Φ 产生了一个有关这些变量的新的函数 $A\Phi$，同理，$A(c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2) = c_1 A\Phi_1 + c_2 A\Phi_2$，其中 c_1 和 c_2 是常数，Φ_1 和 Φ_2 是两个函数。现在，令

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int \overline{\Phi}_1(x_1, \ldots, x_N)\Phi_2(x_1, \ldots, x_N)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N,$$

其中 $\overline{\Phi}_1$ 是 Φ_1 的复共轭。[我们总是用使 (Φ_1, Φ_2) 有限的函数族 Φ。]如果线性算子 A 满足

$$(\Phi_1, A\Phi_2) = (A\Phi_1, \Phi_2),$$

则我们说是 A 是自伴的（self-adjoint），而这样的算子适合用来与物理可观测量相对应。

例如，对应于第 j 个粒子位置的第一个分量 x_{j1} 的可观测量 A 满足

$$(A\Phi)(x_1, \ldots, x_N) = x_{j1}\Phi(x_1, \ldots, x_N)$$

（x_{j1} 和 Φ 的乘积）。对应于第 j 个粒子速度的可观测量 v_j 则为

$$(v_j\Phi)(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{m_j}\cdot\frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\mathrm{grad}_{(j)}\Phi(x_1, \ldots, x_N)。$$

最后，A 在 t 时刻的平均值定义为

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= (\Psi, A\Psi)\\ &= \int \overline{\Psi}(x_1, \ldots, x_N; t)(A\Psi)(x_1, \ldots, x_N; t)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N,\end{aligned}$$

其中 Ψ 是我们系统的波函数。[这就定义了由波函数 Ψ 定义的向量态（vector state）的平均值。存在着与经典概率论的概率分布更接近的，由密度矩阵（density matrices）定义的更广义的平均值。]

5. 如果自伴算子 A 满足 $A^2 = A$，就被称为是一个投影，这样的算子适合对应于简单事件。已知两个线性算子 A 和 B，它们的乘积 AB 是对于所有的函数 Φ 都满足 $(AB)\Phi = A(B\Phi)$ 的线性算子。特别地，如果 $AB = BA$，我们称 A 和 B 是对易算子。两个对易投影的乘积 AB 还是一个投影，且如果 A 和 B 代表事件“A”与“B”，则用 AB 表示事件“A 与 B”是恰当的。如果 $AB \neq BA$，则不存在对应于问题事件“A 与 B”的投影的自然定义。

几个监测器报警或根本没有报警的复杂事件，对应于不需要成为投影的自伴算子（但它是正的，即它是一个自伴算子的平方）。这里，当 A 和 B 可对易时，人们还是可以定义“A 与 B”。

6. 如果说贝尔的思想与本章所勾勒的内容不太一致，是公平的；参看 J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1987)。（这是贝尔已发表论文的一个合集，它已经很好地被物理学界所接受了。）

7. 参看《QED》（第 15 章注释 1 提到了该书）76 页的脚注 8。波包的坍缩是在量子力学的数学表述中引入更多内容的尝试之一，而不是对实验证据做出说明的严格需要。

只要这些尝试与实验证据相容，它们就没什么错儿。量子理论数学表述的另一种详细表述已经由玻姆提出(参看贝尔书中第 15 章注释 6)，并且可以在以下文献中找到：R. B. Griffiths, "Consistent histories and the interpretation of quantum mechanics," *J. Statist. Phys.* 36 (1984)：219~272。

16. 量子：清点状态

在上一章所探讨的量子力学的概念骨架上，我们没有附着太多的物理肉(即内容)。实际上，以下就是我们所发现的：量子力学给出了计算事件概率的规则。因此，它是一个概然性理论，但不是标准的概然性理论，因为，已知事件“A”和“B”，则事件“A 与 B”常常没有意义。

量子力学的内容当然存在于规则中，对特定问题的应用中，以及因此而获得的物理洞见中。这里不是深入量子力学学术讨论的地方，但建立一些物理直觉是很容易且有价值的。不过请记住，当物理学家建立一个直观的论点时，他们都是以艰实的计算作后盾的。科学的非专业阐释，由于避免了这种艰实的计算，总是带着点儿神秘色彩；专业水平上，事情没这么简单，但也没什么神秘。

现在我想给出一点儿计算，但决不超出中学数学和物理的范围。这些计算对于下面的内容并不是真的不可或缺，但无论如何它是非常值得的。

正如上章一样，我们考虑一个质量为 m 的粒子沿直线运动，但现在我们把这个粒子放在一个盒子里。更准确地说，我们将粒子的位置 x 限制在长度为 L 的区间中。同样，我们限制粒子的速度 v 只能在 $-v_{max}$ 到 v_{max} 之间(粒子最大的速度就是 v_{max}，它可以向左或向右运动)。以位置 x 和乘积 mv(质量乘以速度)为坐标作图，我们看到粒子允许存在的范围是图 16.1 中的大矩形。但我们可以选择粒子的状态，使它集中在一个较小的区域内——图中边长为 l_x 和 ml_v 的阴影矩形。在这个状态下，位置 x 有一个大约为 $l_x/2$ 的不确定度，速度的不确定度大约为 $l_v/2$。为了与海森伯不确定关系相一致，我们必须选出 l_x 和 l_v，以致 $ml_x \cdot l_v \geqslant \mathrm{h}/\pi$。事实上，更为仔细的研究表明，我们所能做到的最好的情况就是取

$$ml_x \cdot l_v = \mathrm{h},$$

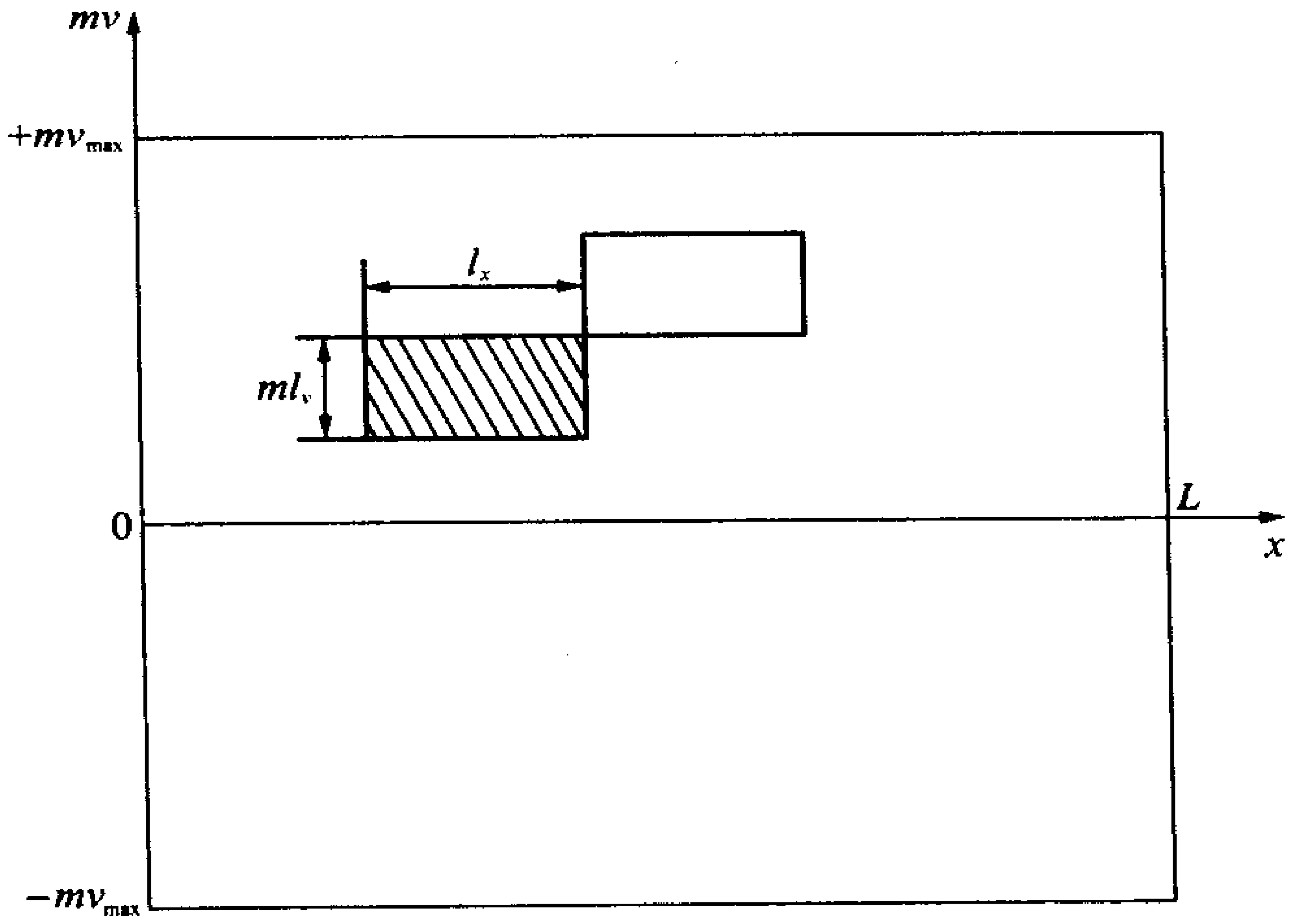


图 16.1　粒子的相空间。大矩形是粒子可达到的区域，小矩形是由于量子不确定性引起的不确定度的度量。

即，图中阴影矩形的面积为 h。变量 x 和 mv 的空间叫做相空间

(phase space)。 在相空间中我们绘制了与第一个小矩形不重叠的另一个小矩形，它相应于我们粒子的另一个完全不同的状态。 这里总共有多少种完全不同的状态呢？ 答案由大矩形面积除以小矩形面积得到，即

$$不同态的个数 = 2mv_{max} \cdot L/\mathrm{h}。$$

严格的专业计算将能够证实这个结果。[1]注意，当不同态的个数被定义好以后，具体这些状态可以以多种方式加以选择(小矩形的面积是固定等于 h 的，但它们的形状可以以不同的方式选择)。

现在，让我们考察粒子的能量；我的意思是关于它速度的能量，称为动能。 如果你以高智力标准在某个国家或州取得了驾驶执照，你可能为了你的驾驶员测验已经学过了动能公式。 这公式是

$$能量 = mv^2/2。$$

(动能是质量乘以速度平方的一半：如果你开着质量为 m，速度为 v 的汽车猛撞墙壁，这个公式告诉你多少能量就足以撞坏墙壁和你的汽车，并把你自己送进医院。)说我们粒子的速度在 $-v_{max}$ 和 v_{max} 之间，这就意味着它的(动)能量最多不超过 $E = mv_{max}^2/2$。

总之，如果我们将一个粒子限制在一个盒子中，并且限制它的能量小于某个确定的值，那么它就只有有限个不同的状态了。 在如何选择这些状态时有某种任意性，但专业的研究显示，它们只能拥有**精确定义了的能量**。 这就是说，**能量是量子化的**：它只能选取离散值。 能量的量子化(quantization)是量子力学的特征性质，它和经典力学的直觉大相径庭。

除了在一条直线上运动的粒子，我们可以考虑一个在 3 维空间运动的真正粒子，并把它放进一个体积为 V 的真正盒子中。 于是我们

可以计算能量小于某个值 E 的粒子的态数目。（这涉及对 3 个空间方向而使用 3 个海森伯不确定关系。）为了取乐，让我给出这个人们可以推得的公式：

$$态数目 = \frac{1}{h^3} \cdot \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2E}{m}\right)^{3/2} \cdot V。$$

经验丰富的科学家立即就能认出，这是以 h^3 为单位度量的可达到的相空间体积。这里的相空间有 6 维：它给出了质点的位置 x 和向量 mv（质量乘以速度）。

通过使用 h 或 π 之类的少量符号，你可以对我们这个物理宇宙谈些深刻的见解，这个想法不啻于巫术。因此，像上面那样的公式，在一些人中引起了强烈反感，而另一些人则又过分热衷于它。物理学家当然属于热衷者一边，并且，他们凭着专用的职业技巧接受了现代巫师的角色。然而，考虑到本书的目的，我将不得不抛弃职业技巧，在几乎没有公式的情况下前进。

但是，我明白你想回去清点态数目。你现在想要在一个盒子中放进不是一个而是许多个粒子。你打算用氧分子、氮分子、氦分子，或其他什么气体分子作为你的粒子，并且考虑令讨论中的气体为一升。在常温常压下，一升的气体大约有 2.7×10^{22} 个分子，即 27000000000000000000000（23 位数）个。你的袖珍计算器也许用符号 2.7E22 表示这个数。（科普作家喜欢把这个数字说成 27 千兆兆兆，但没有别的什么人再会用这种笨拙的语言了。）无论如何，你想知道，对于一升容器中有 2.7E22 个氦分子的系统有多少种不同状态。你还得告诉我，一升氦的总能量是多少。一种合理的选择是，使总能量与氦粒子在室温下的运动相对应。换句话说，你想算出在室温下能够找到的一升氦的所有量子态的数目。（不说“在室温

下”，我们实际上应该说“具有不超过室温下的一升氦所包含能量的总能量数”的。但是，无论怎样说，这实际上对于答案都没有任何不同。）

答案[2]是

$$态数目 = 1E5000000000000000000000$$

当然，5 后面跟着 22 个零写成 5E22 就更好了。但是上述数字已经有了一个 E；是不是弄错了？事实上，没有错。态数目的位数是 5E22，因此也许可以写成 1E5E22。如果你要把这个数完全地写在一张纸上，这张纸就得非常大，并且，不等你完成这个任务，你就要死了。

像 1E5E22 这样的数，离平常的直觉如此远，这再一次引起了一些人的强烈反感，和另一些人的过分热衷。一种合理的意见是作如下定义：

$$熵 = 态数目的位数$$

（= 5E22 在这个例子中）。

更为数学化的定义是，熵是态数目的对数，一些人还希望有一个比例因子：

$$熵 = k\log(态数目)。$$

这些只是无关紧要的细节；选择你最喜欢的定义用就是了。

从我所说过的看来，熵的概念似乎只是对付一个否则就难以处理的数的办法。实际上，熵是有用得多的概念——它是具有核心地位的物理和数学概念。

关键的思想是：熵是一个系统随机性的量度。特别地，（在常温常压下）2 升氦的熵是 1 升的 2 倍，10 升的熵是 1 升的 10 倍。换句话

说，系统的熵与其大小成正比。

注　释：

1．认真的专业讨论将在我们的分析中加入一点儿怀疑：不可能分别在区间[0，L]和[$-v_{max}$，v_{max}]中得到严格限定的位置和速度，只要 L 和 v_{max} 是有限的（用专门术语来说，因为，如果 $\Psi \neq 0$，具紧支撑的波函数 Ψ 的傅里叶变换不可能具紧支撑）。但人们可以使得在[0，L]或[$-v_{max}$，v_{max}]之外的概率非常小。物理学家知道，如我们所做的那样，涉及小矩形的讨论是不太正确的。但它们方便，且常常给出恰当的答案。人们必须记住的是，量子力学并不仅仅是基于海森伯不确定关系的统计理论，尽管对于简单的问题来说，以这种方式看待事物常常给出正确的答案。

2．对于体积 V 中总动能最多为 E 的 N 个粒子，我们有公式

$$\text{态数目} = \frac{1}{N!} S_{3N} \left(\frac{1}{\mathrm{h}^3} V (2mE)^{3/2} \right)^N 。$$

这是相空间中的体积，以 h^{3N} 为单位，考虑到粒子的不可分辨性，要除上排列数 $N!$ [$\mathrm{h} = 6.6\mathrm{E}(-34)$ 焦耳×秒是普朗克常量，S_{3N} 是半径为 1 的 $3N$ 维球体的体积，m 是粒子的质量；这里 $m = 7\mathrm{E}(-27)$ 千克，$V = \mathrm{E}(-3)$ 米^3，$N = 2.7\mathrm{E}22$]。我们取 $\mathrm{E} = 3N\mathrm{k}T/2$ [$\mathrm{k} = 1.4\mathrm{E}(-23)$ 焦耳/（开氏度）是玻尔兹曼常量，T 是绝对温度，这里等于 300 开氏度]。因此

$$\text{态数目} \approx \frac{1}{\mathrm{h}^{3N}} \left(\frac{V}{N} \right)^N (2\pi m\mathrm{k}T)^{3N/2} \mathrm{e}^{5N/2}$$
$$\approx 1\mathrm{E}5000000000000000000000000 。$$

我们忽略了量子统计学和自旋方面的专业问题：它们对于目前的讨论来说并非至关重要。

17. 熵

进行全神贯注的科学思考的方式有很多种，有些人只是坐在桌子前对着一张纸发呆，有些人则不停地踱来踱去，而我个人喜欢平躺下来、闭上双眼。事实上，正在努力思索的科学家看上去可能倒像是正在小憩。全身心地沉浸于科学思索是一种最有价值的经历，但也确实非常艰苦。一个正努力追踪某些念头的科学家对自己是近乎残酷的，让自己变得痴迷，而某种有趣的可能性一旦隐约出现，就立刻集中所有的精力验证它。在这些不确定的念头中，只有很少一些被证实为真而幸存下来，大多数最终还是被淘汰了。大胆而粗略的思想当然要继续发展，但具体细节也必须及时核证，而通常，灾难性的缺憾总是在这一过程中冒了出来。这时，思想必须重新解释，或放弃其中的一大部分。这样的工作过程日复一日，经年累月。当然，并不是所有看似科学家的人都如此艰苦地工作，他们中的许多人早已停止了工作，而剩下的则从未开始过。但对于那些并非装腔作势、自欺欺人，而是真正游戏其中的人们来说，游戏是艰难、紧张，令人

痛苦和精疲力竭的。然而，如果这种劳动的果实、这种努力的结果竟受到傲慢无礼的鄙弃，悲剧就发生了。想像一下，一个发现了自然根本方面真意的人，面对他同时代人的抨击和误解，仍年复一年地继续他的研究，如今变得年老、体衰、沮丧。这些就发生在奥地利物理学家玻尔兹曼身上。1906年9月5日，他结束了自己的生命。那时，他62岁。

玻尔兹曼和美国人吉布斯创建了一门新学科——统计力学。他们的贡献于20世纪物理学的重要性不亚于相对论或量子力学的发现，但这里是另一个不同的天地。正当相对论和量子力学摧毁了已有的理论并以新的理论取而代之的时候，统计力学带来了一场静悄悄的革命。它基于已有的物理模型，但建立新的关系和注入新的概念。经玻尔兹曼和吉布斯建立起来的概念机器已被证明具有格外的威力，并适用于远远超出原先提出的物理学问题的各类不同的情形。

玻尔兹曼的出发点是原子假说——认为物质是由无数不停运动着的小球组成的。19世纪晚期，玻尔兹曼在世的时候，物质的原子结构尚未被证实，更谈不上被公认。所以，正是玻尔兹曼对原子的信念部分地激起了对他的攻击。他不仅相信原子的存在，更进而导出这些假想的物质原子结构所引起的惊人后果。

在玻尔兹曼的时代只有经典力学，而他的一些思想要用量子语言表述才更为方便。毕竟，经典力学和量子力学之间有着非常密切的关系——它们都试图描述同一个物理实在。例如，量子力学中的态数目相应于经典力学中的相空间体积。因此，我将致力于对这些思想作简单明了的解释，而并不十分介意在细节上是否犯了时代错误。

19世纪的工业革命引起了人们对蒸汽机和将热转化成机械功的

兴趣。众所周知，你可以任意地将机械能转化成热(如通过摩擦两块石头)，但反之不成立。热是能量的一种形式，它的使用遵循一些相当严格的规则：有些过程很容易实现，另一些过程则不然。例如，通过混合一升冷水和一升热水很容易就得到两升温水。但把这两升温水还原成一升冷水和一升热水？那是不可能的！将冷水和热水混合是一个不可逆过程。

给出熵的定义，就是向对不可逆性的理解迈出的一步(暂时忘记上一章里我们对这个词的解释)。一升冷水和一升热水分别具有不同的熵，这些熵可以从实验数据计算得到，具体计算过程这里不作赘述。两升冷水的熵是一升的两倍，热水亦然。

如果并排放着一升冷水和一升热水，你可以得到它们的熵之和。但如果你将它们混合，两升温水的熵则比简单的求和要大。通过混合冷水和热水，你已经不可逆地增加了这个世界的熵。这就是规则，称为*热力学第二定律*[1]：在任何物理过程中，熵恒常或增加。而一旦熵增加了，这个过程就是不可逆的。

这当然相当神秘，不令人十分满意。熵的含义是什么？为什么它总是增加而永不减少？这些就是玻尔兹曼试图解决的难题。

如果你相信“原子假说”，那么分子是以各种各样不同的结构组成一升冷水的。事实上，分子不停地四处运动，结构也就无时无刻不在变化。用量子语言来说，我们有一个包含许多粒子的系统，这些粒子各自处在大量不同的状态。这些状态在显微镜下看的细节上是不同的，对于肉眼来说它们完全一样，事实上它们看上去都像一升冷水。

因此，当我们提到一升冷水的时候，实际上我们的所指是非常模糊的。玻尔兹曼发现熵是对这种模糊性的一种度量。专业上，对一

升冷水的熵的正确定义，是这一升冷水中所有不同“微观”状态总数的位数。这一定义当然同样适用于热水，并进而推广到其他许多系统中。事实上，这正是上一章我们对一升氦气的熵的定义。

但上一章对熵的定义并不是得自某些明确的物理启示，玻尔兹曼的成就就是给出了一个简单自然的数学概念，和一个起初显得神秘的物理量。专业上，人们习惯用“对数”取代“位数”，并乘以一个常数 k（事实上 k 就称为玻尔兹曼常量），或许在结果上再加上另一个常量，但我们这里不对这些细节进行讨论。

让我们继续考虑并排放着的一升冷水和一升热水，不进行混合。一升冷水的任何一个状态和一升热水的任何一个状态都可以组成它们的合成系统中的一个新的状态。所以，合成系统的态数目等于两个组成部分中的态数目之积，熵等于两部分的熵之和。这并不稀奇，它们就是被定义成这样的。

但如果将冷水和热水混合会发生什么呢？当然，我们得到了温水，但这个过程进行的精确细节仍令科学家们迷惑。我们所能确定的只是两升温水的态数目比一升冷水和一升热水的态数目之和要大。并且，请记住，温水的所有这些状态对于肉眼来说看起来都一样：我们根本没办法分辨这些通过混合冷水和热水所得到的状态。因此，作为混合的结果，熵增加了。

但为什么应当存在不可逆性呢？我们周围的这个世界表现出极强的不可逆性，但我们如何证明它非如此不可呢？在科学中，当你不知如何证明（prove）一件事时，试着否证（disprove）它看看会发生什么，往往是个不错的主意。所以，让我们设想一个可逆的世界。

经典力学的基本定律不包含任何的不可逆性。假设你观测一个

粒子系统在一秒钟内的运动和碰撞，假设你随后可以突然反转所有粒子的速度，那么粒子将会退回去，以相反的次序再次碰撞，又一个一秒钟之后你将会看到系统回到初条件(但粒子都具有相反的速度，当然，如果你愿意，可以再一次反转它们的速度)。在这个假设之下，熵如果增加了，当然也可以减少回去，不可逆性是不可能的。是玻尔兹曼错了，还是我们疏忽了什么?

我们所设计的是通过同时反转一个大系统中所有粒子的速度来实现时间“倒流”，当然可以争辩这在实际中是不可能的。但类似的事情在一些系统(自旋系统)中是可能的。当然，将一般的物理定律，诸如熵总是增加，基于也许有一天会解除的实践不可能性之上，是令人难堪的。

然而，还存在一个与上述速度反转实验有关的更加微妙的不可能性，这与对初条件的敏感依赖性有关。当我们用经典力学定律研究原子或分子系统的运动和碰撞时，我们设想系统与其余世界没有相互作用。但这是十分不切实际的，即便是已知世界的极限的一个电子的引力作用，也是重要的和不容忽视的。如果在一秒钟之后反转速度，我们得不到时间倒流的结果。在远不足一秒的瞬间后，处于世界极限的那个电子将改变事物的进程，熵不会减少，而只会继续增加。

事实上，初条件敏感依赖性在理解不可逆性问题中的作用，在玻尔兹曼的时代是得不到赏识的。所以，在上述的讨论中我只是再一次容忍了一个小小的时代错误。以现代的眼光看，玻尔兹曼的思想与后来我们了解到的事实完全吻合。但在他的时代里，真相还远未被澄清。当然，他知道自己是对的，但别人认为他的工作完全建立在引人怀疑的“原子假说”上，用可疑的数学从显然是可逆的经典力

学定律中推导出不可逆的时间演化。 他们不能信服。

注　释：

1．热力学第一定律表明，在所有的过程中，能量都是守恒的。（只要人们考虑所有形式的能量，包括热能，它就是正确的。）

18. 不可逆性

我已经强调过物理学的目的就是给出各种物理实在片段的精确的数学描述，而不应太在意“终极真理”，无论那将会是些什么。这也许听起来似乎太没有雄心壮志，因此，你会以为钻研物理学必定是一项相当枯燥乏味的工作。然而，事实恰恰相反，因为物理实在本身决不枯燥乏味。抽象地讨论物理学，无视它试图解释的这个世界，这显然是一种误导，并且毫无用处。

玻尔兹曼的思想就恰好是一个例子。他的出发点是热力学，即处理熵和不可逆性的理论。热力学能够很好地与以往的实验相吻合，并继续为实验所验证。玻尔兹曼一生重要的工作就是在“原子假说”的框架下用统计力学解释热力学。如果原子永远是不可捉摸的假想，如果统计力学永远不能表现出比在玻尔兹曼时代更强的预见性，那么对于一个其思想为“真”的物理学家来说将没有什么意义。但是玻尔兹曼的预想成为了现实，因为如今已经证明了物质是由原子组成的，因为玻尔兹曼关于熵的公式得到了实验的验证，因

为统计力学已获得巨大的预测价值(大部分归功于吉布斯和后来物理学家们的努力)。

在玻尔兹曼建立和发展他的思想的时候，他关于原子的认识离终极真理还差得很远。原子不只是到处飞来舞去的小球而已；它们具有相当复杂的结构，需要量子力学加以描述。玻尔兹曼的预想给了他(和我们)很好的启示，但这些只给了我们认识自然的一步。有没有最后的一步？物理学中是否存在终极真理？令人振奋的是，答案是肯定的，物质的终极物理理论将在我们的有生之年被发现(并证明它的正确性)。但是我们应该明白，玻尔兹曼思想的重要性并不依赖于这一终极物理理论的最终发现。

玻尔兹曼的一生颇具传奇色彩。他自杀是因为从某种意义上来说他是一个失败者，尽管如今他被视为是他那个时代最伟大的科学家之一，比他的那些反对者要伟大得多。显然，他对得太早了。但一个人如何可以对得早一些呢？我以为先入之见起了部分的作用。一个人需要有一些不同于公认的信条的物理预想，并有些固执地追随它们。也许这些预想同早些时候就被证明为错的一些思想是一样的，但如果你具有正确的洞察力，如果你幸运，这些思想将带给你有关这个自然新的认识的钥匙。玻尔兹曼的先入之见显然是机械论的先入之见。笛卡儿曾被类似的机械论的先入之见推动过，可什么也没得到，而牛顿却凭着不同的先入之见创立了现代物理学。但在玻尔兹曼的时代，机械论的先入之见是理解热力学的一个正确的先入之见，它管用。这里还有一些其他先入之见的例子：数学是自然的语言(伽利略)；我们的世界是所有可能的世界中最好的(莱布尼兹)；自然律必须满足审美要求(爱因斯坦)。在任何给定时刻，都有一些科学预想时髦，另一些不时髦却可能在你过世以后使你闻名遐迩……

现在我们打断关于身后荣耀的讨论，回到我们尚未完成的对不可逆性的讨论。让我们再一次考察复杂的粒子系统的时间演化，如一升容器中的氦原子，或一升水中的分子。我们将用经典力学描述这些粒子，并假设它们构成一个孤立系统：不存在与外界的相互作用，故没有能量的输入和输出。玻尔兹曼的思想是，经过一段时间后，系统将访问所有能量上可能的构形。换句话说，符合总能量标准的粒子位置和速度的所有构形将全部得以实现，而只要等待足够长的时间，你全都可以观测得到。更准确地说，系统将（一次又一次地）接近任何能量上可能的构形；这是上文我们称为**不断返回**的一个例子。玻尔兹曼思想在数学上恰当的表述——称为**遍历性假设**（ergodic hypothesis）——是在他去世以后才建立起来的。理解它并不十分容易，但物理学上它是相当明确的，且非常值得了解。

你应该记住，当量子物理学家谈到**态数目**时，经典物理学家必定谈到**相空间体积**，这在如今是相关的概念。在一升氦的例子中，相空间的一个点表示氦原子的所有位置和速度。我们将兴趣集中在具有给定总能量的构形所组成的那部分相空间（因为我们的系统没有能量的输入、输出）。将我们这个复杂系统的时间演化看作是用相空间中的一个点的运动来描述的。现在，我们给出遍历性假设内容的表述：**代表我们的系统的这个点在相空间中运动的过程中，它在每个区域中停留的时间与这一区域的体积成正比。**[1]

如果接受遍历性假设，我们现在就可以理解为什么我们在一瓶两升的温水中永远不能观察到水自发地分成一层冷水和一层热水的现象。确实，如上所述，两升温水的熵比一升冷水和一升热水的熵之和要大。假设它们之间熵的差别是1%，那就意味着，如果我们先数出一升冷水加上一升热水的态数目，后数出两升温水的态数

目，就会得到两个巨大的数，它们在长度上(即这两个数的位数上)相差1%。态数目，也即相空间体积，因此就相差了一个很大的量。特别地，两升温水的相空间体积远大于一升冷水和一升热水的相空间体积之和。我们现在观测代表我们系统的点在相空间的运动。所以，依据遍历性假设，它将把大部分时间花在对应于两升温水的那个区域里，而只有很少的时间停留在对应于一层冷水和一层热水的那部分相空间。实际上，你永远都不可能看到温水分成冷水和热水两部分。

让我再解释一遍。你非常小心地将一层热水倒在一层冷水上面，这时你让你的系统处于相空间中一个很小的特定区域里。一会儿以后，热慢慢扩散开来，你得到的是均匀的温水，它对应于相空间中大得多的区域。如果你等待足够长的时间，不断返回将把你的系统带回到一层冷水和一层热水的情况。但多长的时间才算足够长呢？估算这个时间的方法与第16章所述我们清点态数目有关，答案是这个时间长得令人沮丧。足够长就是过长。由于人生短促，我们将永远不能再看到一层热水覆盖于一层冷水之上的情况了。在这种意义上，两层水的混合是不可逆的。(至于初条件敏感依赖性的作用，见注释。)[2]

我们根据玻尔兹曼的理论得到的关于不可逆性的解释既简单又精妙。它是一种概然性解释。不存在物理学基本定律的不可逆性，但关于我们所考虑的系统的初态有些特殊：这个初态很不概然(very improbable)。这句话的意思是，它对应于相空间中一个相对小的体积(或对应于小熵)。时间演化导致相对大的体积的区域(或大熵)，即对应于系统很概然的状态。原则上，经过很长一段时间以后，系统将会回到那个不概然的初态，但我们将看不到这种情况发生……作

为物理学家，你会建立这样一个理想化：你的系统中的粒子数趋于无穷大，不断返回的时间也趋于无穷大。在这样的极限情况下，你得到的是真正的不可逆性。

我已经描述了如今物理学家公认的不可逆性的解释，但仍有一些不赞同的声音，例如普利高津。[3]但这些不赞同与其说是基于物理证据，不如说是出于哲学先入之见。哲学先入之见并没有什么错；它在作出物理学发现中的价值是无法估量的。但在适当的时候，事情应该由数学理论和物理实验的仔细比较来解决。

我们讨论的一个因素，基本物理定律的可逆性，似乎是个不错的设想。[4]但遍历性假设又会怎样呢？这需要一个数学证明，可这样的证明甚至对于简单的模型依然阙如。然而，物理学家们并不太在乎这个问题。我们已经实现了对不可逆性很多重要的数学和物理方面的更加精确的认识。遍历性假设可能应被削弱。一些系统[例如自旋玻璃(spin glasses)]也许需要另一条考察事物的途径。无论如何，基本上我们认为我们是懂得正在发生着什么的。

这种信心也许有一天会被动摇，但目前，我们对**平衡态统计力学**的充分认识支持了我们的信心。物理学的这一分支并不关心混合冷水和热水的复杂问题，只考虑冷水和热水的比较，当然还有与冰和水蒸气的比较。平衡态统计力学的预言与实验精确地一致。很明显，这是一个我们知道我们在做什么的物理学领域。平衡态统计力学是一个相当专门的学科，拥有相当丰富的概念。它强有力的思想已经被运用于数学和其他一些物理学领域，并在其中起着主要的作用。我认为平衡态统计力学从某种意义上讲，是处于最佳状态的科学，因此我将试着在下一章带你浏览这一学科。

注　释：

1．*遍历性*

考虑一升容器中 N 个氦原子组成的经典力学系统（氦原子与容器壁碰撞，同时我们也考虑原子间的相互作用）。对于每一个原子，令它的位置为 x_i，它的质量和速度的乘积为 mv_i（＝动量）。x_i 和 mv_i 合成的坐标 X 代表我们系统的相空间 M 内的一个点。经过时间 t，X 被一个新的点 f^tX 所取代，f^tX 的总能量与 X 的相同。称具有相同能量 E 的 X 的集合 M 为**能壳**。相空间体积（dx_i 乘以 mdv_i 对 i 求积）自然就是在能壳上的体积。设 A 是 M_E 的一个子集，vol A 代表它的体积，则

$$\mathrm{vol}(f^tA) = \mathrm{vol}\,A,$$

即，时间演化过程中体积保持不变。精确地表述这一切要谨慎（例如，A 必须假设是可测的），但到目前为止一切都直截了当。现在这里有一些新的东西。如果 M_E 的一个不变子集 J（即，对于所有的时间 t，有 $f^tJ = J$）不能满足 $0 < \mathrm{vol}\,J < \mathrm{vol}\,M_E$（即，$J$ 的体积必须等于零或 M_E 的体积），我们就说在能壳 M_E 上的时间演化是*遍历的*。

假设时间演化 f^t 是遍历的。那么对于 M_E 的每一个子集 A，和几乎每一个初条件 X，在 A 中 f^tX 所用的一段时间为 $\mathrm{vol}\,A/\mathrm{vol}\,M_E$。［更精确地说，如果在 A 中 f^tX 所用的时间长度为 $l(X, A, T)$，其中 $0 < t < T$，则当 $T \to \infty$ 时，$\lim l(X, A, T)/T = \mathrm{vol}\,A/\mathrm{vol}\,M_E$；这是*遍历性定理*的一个形式。］那么，对于遍历时间演化，时间平均自然就与能壳上的体积相关联，这也就是为什么遍历性如此重要。不幸的是，很难证明一个力学系统是遍历的。在第 7 章西奈的台球游戏中已经证明了这一点，但对其他系统几乎没什么影响。对于我们的氦原子系统来说，它仍停留在“遍历性假设”阶段。

2．对于遍历时间演化，我们需要很长的回归时间，这也就给出了不可逆性的解释。但只要回归时间长，我们可以不需要遍历性而得到不可逆性。因此，把遍历性要求弱化一些是可能的，且可能在一些物理理论中也是必要的。我在第 17 章中提到的初条件敏感依赖性对认识不可逆性是有用的。怎么会的呢？实际上，初条件敏感依赖性对遍历性并不必要，但对遍历性有所帮助。例如，在证明西奈台球游戏的遍历性时，它就是第一步。

对于非遍历的时间演化，很少一些外部噪声就会把系统从一个“遍历分量”推到另一个“遍历分量”，只要能壳是连通集（connected set）。这种小扰动的影响（像处于我们已知宇宙的极限处的一个电子的引力作用）在存在初条件敏感依赖性时是有效的，甚至会有让非遍历系统看上去是遍历系统这样的结果。

如上所述，必须承认有些力学系统拒绝呈现遍历行为。事实上，KAM 理论（由 A. N. Kolmogorov，V. A. Arnold 和 J. Moser 得到）给出了违反遍历性的重要例证。（对 KAM 理论的一般讨论，见于 J. Moser，*Stable and Unstable Motions in Dynamical Systems*，Annals of Mathematics Studies no. 77［Princeton：Princeton University Press，1973］。）另外，对某些系统进行的数值处理，显示出非遍历行为。

3．I. Prigogine，*From Being to Becoming*（San Francisco：Freeman，1980）。顺便提一下，一个重要的问题是，我们的宇宙如何并且为何以如此小的熵开始。有关这一点的讨论将涉及宇宙起源的大爆炸理论，这使我们离题太远了。

4．时间反演下物理学定律的不变性，只有对于基本粒子的*弱相互作用*是可疑的。对于那些相互作用来说，时间反演运算 T 不是严格对称的，但另一个时间反演运算 TCP 据信是严格对称的。实际上，大多数物理学家都认为这些事实与宏观水平上观测到的不可逆性基本上不相关。

19. 平衡态统计力学

你在一个艺术博物馆中参观，正走过20世纪早期法国油画部分：这里是奢华的雷诺阿(Renoir)，那里是明白无误的莫迪里阿尼(Modigliani)，还有凡·高(van Gogh)的花卉，塞尚(Cézanne)的水果。继续走，你瞥见了毕加索(Picasso)，或许是布拉克(Braque)的作品。你以前并未见过这些作品，但你通常对它们的作者是谁毫无疑问。例如，凡·高在他生命的最后几年里创作了数量惊人的作品，全都令人晕眩地美丽，并能一眼就与高更(Gauguin)的作品区分开来。你是如何分辨它们的呢？当然，它们的绘画方式不同，主题不同，但还有些别的什么说不清楚的东西让你立刻就能认出它们，这就与色块的结构和色调的平衡有关了。

类似地，只要一打开收音机，你立刻就能分辨出听到的是古典音乐还是甲壳虫乐队的作品。而如果你对古典音乐还有哪怕很少的一点儿兴趣，你就能区别出巴赫(Bach)与16世纪音乐，贝多芬(Beethoven)与巴赫，巴尔托克(Bartok)与贝多芬。你也许以前并没

听过这些曲子，但它们在声音的安排上有什么东西是独特的，让你几乎立即就辨别出来了。有些人力图用统计学方法抓出这些“独特的东西”。[1]特别地，一些人关注相继音符间的音程。小的音乐音程是很普通的，在老式音乐中尤其普通。近来的音乐中更加随意运用各种不同的音程。估算一段乐曲中相继音符间音程的频率，我们可能就能因此决定它的作者是布克斯泰胡德（Buxtehude）、莫扎特（Mozart），还是勋伯格（Schönberg）。当然，我们通过多听几个小节，甚至可以更快更准确地得到同样的结论，但事实上用的是同样的方法：人的耳—脑系统是这样一部非凡的装置，它可以提取各种统计信息，让我们能够说出这段作品是出自蒙特威尔地（Monteverdi）、勃拉姆斯（Brahms），还是德彪西（Debussy）。

所以我的论点是，基于统计证据我们得以辨别一个画家或一个作曲家。但你也许会认为这是荒谬的：我们怎么能仅凭着概率就确信我们的辨别呢？回答是我们几乎能确信。就像我们通常几乎能确定街上碰到的人的性别：男性通常个子高，头发又短又密，脚大，等等。任何一个单一的特征都相当不可靠，但在短短一秒钟的瞬间里你就捕获了许多特征，一般的情况下也就没有理由再怀疑了。

然而还有一个问题：为什么一个特定艺术家总是用可以表征他的同样一组概然性特征创作呢？或是换一个例子：为什么你的笔迹如此独特，使别人不能轻易模仿，而你自己也难以伪装？我们不知道这些问题的答案，因为我们不确切知道大脑是如何工作的。但我们了解一些类似的事情，从某种意义上讲是平衡态统计力学奠基石的一个基本事实。

这一基本事实是：**如果给一个复杂系统施加一个简单的全局条件，那么满足这一条件的系统构形通常具有一组可以唯一表征这些构**

形的概然性特征。再读一遍上面的句子：它是故作含混的、形而上的，从而适用于绘画和音乐。某一个艺术家的创作根源就是“简单的全局条件”，而作品的“一组概然性特征”让我们得以确认这个艺术家。现在，我们想讨论的是平衡态统计力学。那么，复杂系统将典型地由盒子里的大量粒子构成(我们的标准例子是一升氦)。简单的全局条件就是，至多只能具某一个值 E 的系统总能量。我们限定了系统的宏观状态，如前所说，这就将决定它的微观概然性结构。

我再一次顺从写一个方程的欲望。这是以粒子速度 v_i 和位置 x_i 表述的粒子系统能量的表达式：

$$\text{能量} = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 + \sum_{i<j} V(x_j - x_i)。$$

如上所述，$mv_i^2/2$ 是第 i 个粒子的动能。$V(x_j - x_i)$ 项是第 i 个粒子和第 j 个粒子相互作用所引起的势能。我们假设势能只依赖于两个粒子间的距离，并在距离增大时迅速趋于零。于是我们的简单全局条件即

$$\text{能量} \leqslant E。$$

所以我的观点就是，如果位置 x_i 和速度 v_i 所构成的构形满足这一条件，它通常看上去就显得很特殊，并能与对应于势能 V 或能量 E 的选择的构形区别开来。难以置信，是不是？确实，这需要一些时间去理解，而这些应归功于吉布斯和他的追随者们。此种分析的细节相当困难和专门，这里我们不做讨论。但我想对一个简单而优美的中心思想给出解释。

怎么说呢，我可以想见你还有异议，而我必须立刻解决它。如果我们的构形满足

$$能量 \leqslant E,$$

那么，当 E' 大于 E 时它也将满足

$$能量 \leqslant E'。$$

所以，与 E 相联系的构形不能从与 E' 相联系的构形中区分出来，与前面我的观点矛盾，而它就是胡言。

挽回这一观点的是副词“通常”。具能量 $\leqslant E'$ 的构形比具能量 $\leqslant E$ 的要多得多，所以，具能量 $\leqslant E'$ 的构形通常将不具有能量 $\leqslant E$，也就不会与低能量情况中的构形相混淆。用更专门的语言来说，与 E' 相联系的熵比与 E 相联系的熵大，从而相应的相空间体积(或态数目)也大得多。

在某种意义上，我已经给出了我想要说明的简单而优美的中心思想。让我再举个简单明确的例子。令势能 V 等于零，那么，用能量表述的系统全局状况是

$$\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \leqslant \frac{2E}{m}。$$

为了使问题尽可能简化，我假设 N 个粒子处于一个一维的盒子里，使得 v_i 就是数，而不是向量。令 $2E/m = R^2$，则

$$\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \leqslant R^2$$

说明由分量 v_i 组成的 N 维向量具有长度 $\leqslant R$。(我用了毕达哥拉斯定理。)也就是说，所允许的速度结构由 N 维空间中位于半径为 R 的球体内的点表示。半径为 $R/2$ 球体内的构形数占总数的多少呢？答案就是这两个球体的体积之比：若 $N=1$，即 $1/2$；$N=2$，即 $1/4$；$N=3$，即 $1/8$；…；$N=10$，即 $1/1024$；…；$N=$

20，则小于百万分之一；如此等等。如果我们有许多粒子(就是说，如果 N 很大)，那么实际上，所有的构形都将会在半径 $R/2$ 的球体之外。同理，它们将会在半径 $9R/10$，或 $99R/100$ 的球体之外。

结局是：取一个半径为 R 的 N 维球体，如果 N 很大，则球体内的大部分点事实上都将集中在非常靠近球表面的地方。（当然会有例外，如靠近球体中心的点，因为球体的中心并不靠近表面。)至此，我们得到了一个例子，其中简单的全局条件(球体内的一个点)通常意味着苛刻得多的条件(点非常靠近球体的表面)。这个状况相当普遍，而它依赖于以下事实：我们更愿意说通常而不是说总是。同时，我们假设了 N 很大：我们考察的是多维几何(即包含许多粒子的复杂系统)。

科学家的大部分工作皆追随一般的思想(如上述关于复杂系统的形而上学思想)，看它能在多大程度上被证明成立，什么时候开始瓦解或变得无用。实际上，这意味着大量的艰苦工作，我甚至不能给出这种艰苦工作的思路，[2]但我希望你记住它确实存在，并且正是现在这些非专业讨论的基础。企图从形而上学和文学的角度进行这些讨论，就像蒙着眼睛开车：只能导致灾难。用这一告诫满足了我的良心后，关于平衡态统计力学我可以多说几句。它将会有一些专业，你要么选择仔细地精读这一章剩下的部分，要么就做出相反的选择：尽可能快地进入到下一章。

如上所述，当能量 E 增加(用 ΔE 表示)的时候，熵 S 也增加(用 ΔS 表示)。比率 $\Delta E/\Delta S$(指能量对熵的求导)是一个重要的量，我们称之为 T。

假设我们现在有由两个部分 Ⅰ 和 Ⅱ(两块相互平衡的物质)组成的系统。我们施加条件

$$能量 \leqslant E。$$

如上所述，这意味着系统的能量通常都近似等于 E。但还存在其他后果：子系统 I 和 II 的能量也几乎分别固定于某个值 E_{I} 和 E_{II}。系统如何选择能量值 E_{I} 和 E_{II}？它是在满足 $E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}} \approx E$ 的条件下尽量使系统 I（有能量 E_{I}）和系统 II（有能量 E_{II}）的熵之和最大。如果你考虑一下它，你将发现这有意义：系统只是在能量固定的条件下尽可能大地占据相空间的体积。但熵之和最大的条件也可以用系统 I 的 T 等于系统 II 的 T 来表达。[3]

$$T_{\mathrm{I}} = T_{\mathrm{II}}。$$

而这就自然而然地引入了温度的定义：T 表示绝对温度。定义中含有一个惯用常量因子：

$$绝对温度 = \frac{1}{k}\,\frac{\Delta E}{\Delta S},$$

因子 k 是我们已经遇到过的玻尔兹曼常量。如果两个子系统有相同的温度，则称它们平衡。

注意：尽管我们已经随便地用冷水和热水来表示较低和较高的总能量，但直到现在才引入温度概念。不同于以实验证据为出发点，我们起始于大量维数几何的一般思考，而自然结束于一个必然是温度的量。早期的统计力学试图了解一个由许多原子和分子组成的世界看起来是个什么样子——从头开始。你能想像，当他们发现由此重建的世界就像我们周围这个世界的时候，他们的惊奇、兴奋和力量感吗？

注　释：

1. W. Fucks and J. Lauter, *Exaktwissenschftliche Musikanalyse*, Forschungsberichte des

Landes Nordrhein-Westfalen no. . 1519 (Koln-Opladen: Westdeutscher Verlag, 1965). 就此条参考文献，我感谢尚拉(Karine Chemla)。

2. 这个艰巨工作的一个方面，是开始为人们所知的所谓大偏差理论。参看 D. Ruelle, "Correlation functionals," *J. Math. Phys.* 6 (1965): 201-220; O. Lanford, "Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics," in *Statistical Mechanics and Mathematical Problems*, Lecture Notes in Physics no. 20 (Berlin: Springer, 1973), pp. 1~113; R. S. Ellis, *Entropy*, *Large Deviations and Statistical Mechanics*, Grundlehren der Math. Wiss. no. 271 (New York: Springer, 1985)。

3. 服从 $E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}} = E$ 的 $S_{\mathrm{I}}(E_{\mathrm{I}}) + S_{\mathrm{II}}(E_{\mathrm{II}})$ 取到最大值，也就是通过 E_{I} 使 $S_{\mathrm{I}}(E_{\mathrm{I}}) + S_{\mathrm{II}}(E - E_{\mathrm{I}})$ 取到最大值，且此时 $S_{\mathrm{I}}(E_{\mathrm{I}}) + S_{\mathrm{II}}(E - E_{\mathrm{I}})$ 关于 E_{I} 的导数等于零。这就导出 $S'_{\mathrm{I}}(E_{\mathrm{I}}) + S'_{\mathrm{II}}(E - E_{\mathrm{I}}) = 0$，即 $T_{\mathrm{I}} = T_{\mathrm{II}}$。

20. 沸腾的水和地狱之门

如果你不懂俄文，所有这种语言的书籍对你来说看上去都一样。同理，除非你受到过适当的训练，否则你很难察觉各种理论物理领域之间的小差异：你处处所见皆是点缀着华而不实的希腊词汇、公式和专业符号的深奥文本。其实，不同的物理学领域具有非常不同的味道。以狭义相对论(special relativity)为例。这是一个优美的领域，但对我们来说已再无秘密可言；我们觉得已经知道了所有我们想要知道的一切。统计力学却恰恰相反，仍留有令人敬畏的秘密：一切迹象都表明我们只了解了有待了解的一小部分而已。那些令人敬畏的秘密是什么？本章将对它们中的两个进行描述。

一个令人迷惑的自然现象是水的沸腾，当然，水的冻结也同样神秘。如果我们取一升水降低其温度，它应变得越来越黏稠似乎是理所当然的。我们也许猜测，温度足够低的时候，水将黏稠、僵硬到呈现固体的状态。这种对于水凝固过程的猜测是错误的。[1]随着我们降低水温，我们看到水在某一个温度完全突然地转变成冰。同理，

加热水时，水在某一个温度沸腾，就是说，水从液态变成水蒸气将经历一个不连续的变化。水的冻结和沸腾是**相变**(phase transitions)的常见例子。这些现象事实上如此熟悉，以至于我们忽视了其实它们是完全陌生和需要得到解释的。也许人们会说，物理学家正是那些没有将水温降低或升高时，水应该冻结或沸腾视作显而易见的人。关于相变，统计力学告诉我们些什么呢？

根据我们的一般原则，对系统施加一个全局条件(在本例中即固定温度)，则与其有关的各种事物(**通常**)就被唯一地决定了。一个对氦在20 ℃下原子结构的简单印象，就应该使你能将它与相应于另一个温度情况下或另一种物质的简单印象区分开来，而方式与你一眼就将凡·高与高更区分开来的一样。所谓的"一组概然性特征"随温度而改变，此种变化通常是渐进的。同样，随着画家年龄的增长，他的风格也许也会渐渐地改变。接着，意料之外的事发生了。在某一个温度，渐变(gradual change)被突跳(sudden jump)所取代——从氦气到液氦，从水到水蒸气或到冰。

人们能否在对分子的一瞥之间轻易地将冰与液态水区分开来？可以。冰是结晶的(想一下雪花)，且晶体轴的方向在这一瞥中可以被看作是分子在某一个方向上的统计排列。液态水则相反，不存在什么特定的方向。

因此，这儿对理论物理学家有一个问题：证明当升高或降低水温的时候，你可以得到向水蒸气或向冰的相变。目前，这是一个离谱的要求！我们离得到这样一个证明还远着呢。事实上，我们不能给出哪怕一种原子或分子在低温下应该结晶的数学证明。这些问题对我们来说还太难了。

如果你是一个物理学家，你不会觉得面对一个极其难以解决的问

题有什么不寻常……当然，出路总是有的，但这要求以一种或另一种方式改变你与实在的关系。要么，你视它为一道数学问题，与你不能解决的一个问题类似，但容易一些，而忘记它与物理实在的紧密联系。要么，你支持物理实在，但用不同的方式将其理想化（常常以丧失数学上的严密性和逻辑上的连贯性为代价）。两种方法都被用于尝试认识相变，两种方法都卓有成效。一方面，能够“在格子上”研究系统。在这样的系统中，原子不能自由移动，而只能被安置在一些离散的位点上。对于这种系统，人们有某些相变发生的很好的数学证明。[2]或者，人们可以对物理实在的理想化注入新的思想，如威尔逊的*标度变换*思想，亦已取得相当丰富的新成果。[3]然而，这种状况并不令人十分满意。我们期望从概念上全面地理解为什么会有相变。而这，迄今为止，还未被我们获得。

为了显示统计力学思想的威力，现在我将离开沸腾的水或冻结的水，跳入另一个完全不同的事物：黑洞(black holes)。

如果你向空中放一枪，子弹会在一会儿以后落回来，因为它的速度还不足以克服重力，即地球对子弹的吸引力。但一颗非常快的子弹，速度超过所谓*逃逸速度*，如果我们忽略如空气摩擦减速等小的细节影响，就将永远地飞离地球不再回来。有些天体的逃逸速度比地球的小，另一些则大。假设你在一个小而重的天体上，其逃逸速度比光速还快，那么，无论你想发射什么东西出去，包括光，都将落下来。你不能向外部世界发送任何信息；你被陷死在里面。你所在的这种天体叫做*黑洞*，它应该发出如但丁(Dante)所说的写在地狱之门上的那个警告相同的信号：*Lasciate ogni speranza*，*voi ch'entrate*. 放弃所有的希望，进来者……

事实上，我对黑洞的描述有些异想天开：当你提到“速度大于光

速”的时候，在一个物理学家的头脑里，红灯开始闪烁，警报开始轰鸣。当同时讨论重力和光速的时候，我们应该采用的物理理论是广义相对论(general relativity)。根据爱因斯坦的广义相对论，黑洞确实存在，且能够旋转。当大量的物质积聚在一个很小的空间里时，黑洞形成了；它们吸引并吞噬任何无意间靠近的东西。天体物理学家并没有他们观察到黑洞的铁证，但他们认为他们有。尤其是，位于星系中心的极强辐射源和类似恒星的天体(“类星体”)据信都与质量非常大的黑洞有关。因为理论上黑洞不发射任何东西，所以辐射并不发自黑洞本身，而是发自它周围的区域。那些区域，如果我们相信天体物理学家，就是些极其不快的地方，如同地狱之门那样有害。确实，如果是一位物理学家看管着地狱，那么很可能地狱看上去就像一个大质量黑洞。假设1E9 (10 亿)的太阳质量坍缩成一个旋转的黑洞，那么，那里将会有一个向洞中盘旋进去的物质的吸积盘(accretion disk)。这些高温且已被电离的物质，形成一个导电的等离子体，通常会伴有磁场，人们可以试着计算坠入物质的动力学机制、磁场、电场、电流，等等。结果是可怕的。在黑洞周围发展起来的电压降估计达到1E20 (20 个 0！)伏的数量级。电子被这些电势差加速，与光子(光粒子)碰撞。光子彼此碰撞就会产生电子—正电子对的地狱。至少，这是将发生景象的一种观点。至于细节却未得到普遍的认同，但总体绘景就是像太阳系这么大范围的空间向外辐射出巨大的能量。你还记得，通过著名的爱因斯坦质能方程 $E = mc^2$，能量和质量是等价的。在这样的情况下，能量输出大约是每年 10 太阳质量数量级。这是一个无论你怎么看都大得可怕的量。

但是理论物理学家并不如此容易被吓倒，他们继续追问下面的问题。假设黑洞并不是位于坠入物质吸积盘的中央，而是孤立于完全

的真空中。看着这样一个纯粹的黑洞，我们将发现什么呢？它还会产生任何辐射吗？依据广义相对论的经典思想，纯粹的黑洞将会有重力作用：它会吸引遥远的物质，而如果它旋转的话，也会使那些物质转动。黑洞可能也携带电荷，但为了简化模型，我们选择忽略它。除此之外，纯粹的黑洞是很相像的。具有相同的质量和相同的旋转(即相同角动量)的两个黑洞是不可区分的，用氢还是用金造黑洞没有任何分别。黑洞已经忘了它的起源(除了质量和角动量)，而物理学家将拒绝谈论洞是用氢还是用金做的。而且，根据广义相对论，黑洞不会产生任何辐射。

钻研黑洞问题的人中有一位英国天体物理学家霍金(Stephen Hawking)，他不满足于没有辐射的结果。广义相对论的结论是明确的，但它没考虑量子力学。(事实上，我们没有一个可以统一量子力学和广义相对论的完全一致的理论。)为什么量子力学对于这个问题如此重要呢？因为依据量子力学说来，“真空”不能是完全空的。如果你考察非常小范围的真空，位置相当精确地已知，那么，海森伯不确定关系断言，速度(更确切地，动量)必然就相当不确定了。这意味着一定存在以粒子形式高速飞过的*真空涨落*(vacuum fluctuations)。[4]我知道这论点听上去像是诈骗，但这是将数学表述以尽可能一致的方式诉诸语言的最佳途径。一般来说，如果你考察的是大范围的真空，真空涨落是无关紧要的。但如果这真空是在一个黑洞附近受到它强大的引力作用时又会怎样呢？嗯，依据霍金的计算，构成真空涨落的一部分粒子落入黑洞，另一部分则以辐射的形式逃逸了。事实上，黑洞就像任何一块热物质一样会发射出电磁辐射(光)，从而人们可以谈论黑洞的温度。

霍金的结果起初被物理学家们抱着相当大的怀疑态度所接受，但

获得公认的计算被重做了，对这个问题的新的洞见得自各种来源。[5] 也许，我们应该立刻承认，大质量黑洞具有非常低的温度，它们的霍金辐射还不能被探测到。 然而，这种辐射具有极大的理论意义。 现在，我就试着给你一个这方面的浏览。

让我们回到熵不能减少这个事实(所谓热力学第二定律)。 如果你向一个黑洞中倾倒具有大量熵的物质，结果似乎会与这个事实矛盾。（黑洞的质量将增长一点儿，但另一方面，黑洞根本就不记得你倒进来的是什么。)然而，通过赋予该黑洞一个熵(它依赖于其质量和角动量)能够拯救热力学第二定律。 黑洞可以由许多不同的方式(用氢、金，等等)制造出来，该黑洞过去可能有过的历史数的位数是其熵的自然定义。 如果愿意，你可以写为

$$\text{熵} = k\log(\text{黑洞可能的历史数})。$$

如果是这样，就为黑洞赋予了一个一致的热力学绘景，特别是具有明确定义的温度。 但接下来，它就应该像任何在这个温度下的物体一样发射出电磁波(光)。 是的，正如霍金证明的，它发射电磁波。 那么，黑洞出乎意料地适合于热力学和统计力学的框架。 这是有时会在科学中发生的奇迹之一，完全出乎人们的意料，它告诉我们，自然规律比我们想像的更加和谐。

注　释：

1．如果你用熔化的玻璃代替水，并让它冷却，它会变得越来越黏稠，最后变成非常坚固而冷硬的玻璃。 但物理学家会告诉你玻璃不是通常的固体：它的微观结构并不处于平衡态，只要你等待足够长时间，其微观结构就会发生变化。 然而，在你的有生之年，它是不会有显著的变化的。 这意味着玻璃不属于平衡态统计力学所能很好地描述的那个物理实在片段。

2．请特别参看 D. Ruelle, *Statistical Mechanics: Rigorous Results* (New York: Benjamin, 1969)； Ya. G. Sinai, *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results*

(Oxford: Pergamon, 1982)。

3. 例如，参看 D. J. Amit, *Field Theory*, *the Renormalization Group*, *and Critical Phenomena*, 2d ed. (Singapore: World Scientific, 1984)，以及其中所引的参考文献。

4. 真空涨落中的一个典型过程是，一个电子和一个正电子同时产生，随即非常快地就相互湮灭而消失。（因为电荷守恒，所以一个电子不能独自跳出真空或消失。）量子电动力学(quantum electrodynamics, 简称 QED)即研究像这样的过程，而费恩曼的书正是浅显地介绍了物理学这一迷人的领域(参看第 15 章注释 1)。

5. 关于黑洞，一本有趣的书是 K. S. Thorne, R. H. Price, and D. A. Macdonald 的 *Black Holes*: *The Membrane Paradigm* (New Haven: Yale University Press, 1986)。这是一本专业书，充满了复杂的公式，但展列这些复杂的公式有助于物理学家对非常专业的理论细节的样子有个大体上的认识，尽管他们自己并不想成为这方面的专家。浅显易懂得多的当然是霍金自己的通俗读物：S. W. Hawking, *A Brief History of Time* (London: Bantam, 1988)。

21. 信　息

钢笔饱蘸着你自己的鲜血发出刺耳的声音滑过羊皮纸面。你刚刚与魔鬼签订了一纸协约。只要他在你活着的时候赐予你财富和所有与之相随的东西，你许诺死后将灵魂交付给他。他如何兑现他的那部分承诺？也许他会让你知道一处宝藏的位置，但那有点儿老套。更方便些，他会事先告诉你赛马的结果，让你恰到好处地发财。如果你真的非常贪婪，也许他会给你股市行情的预报。知识是魔鬼所要提供的东西。任何情况下，你出卖灵魂所得到的回报都是知识、信息：宝藏的位置、获胜的马的名字、股票价格的清单。信息使你变得富有、受到爱慕和尊敬。

关于信息的威力，这儿还有另一个例子。设想某种外星异类想从地球上根除人类而不损害环境，它们可用的方法之一就是选用适当的病毒。他们想要的病毒要像AIDS（艾滋病）病毒一样致命，但同时也要像某种新的普通感冒病毒一样易于传播和迅速起效。他们希望这些病毒不给我们留有设计策略、培育疫苗等做类似事情的时间。

目前，用来根除人类的这种病毒在地球上大概还不存在。但运用适当的技术可以制造它们。那种外星异类所需的是一个蓝图——又是信息。就AIDS而言，所需的信息本质上存在于编码有病毒遗传信息的特定碱基序列之中。这个序列由四字母字母表（A，T，G，C）[1]组成，包含9749个左右的字母。它是一条相当短的消息。很可能就有一条类似的消息正代表着一种致命、速效、易于传播和足以将我们统统消灭的病毒的遗传编码。记录这样一条拼写着人类末日的消息，仅需要你手中一本书的几页纸而已。

我个人并不十分担心那些不友善的外星人。疯狂的国家首脑们和狂热的政府似乎是更大的威胁。他们可以毫不费力地找到具有混乱理想主义思想的科学家，或尽责但毫无想像力的技术人员，去为他们实施最愚蠢的计划。也许这才是人类历史终结的方式。

在这方面，我只有一个令人安慰的想法与你分享。如果不友善的外星人或疯狂的科学家不得不依赖纯粹的运气来获得有关致命病毒的蓝图，那我们真的会是非常安全的。用四字母字母表写成的一万字母左右的消息数目如此之大，以至于无从筛选：此种消息比银河所有河滩上的沙砾还要多，事实上比我们所知的整个宇宙中的所有原子还要多得多。简言之，没有人能指望猜中这条一万字母的消息。

一条消息的长度暗示着它的*信息内容*（information content），也就告诉我们猜中它有多难。我们力求更精确地定义一条消息的信息内容。长度固然重要，但字母表肯定也起作用：你可以用两个符号0，1代替四个字母A，T，G，C，即用一对符号翻译一个字母：A＝00，T＝01，G＝10，C＝11。翻译过的消息比原始的那一条多出一倍的字符，但信息内容是相同的。或者你可以用a，b，c，…，p十六个字母代表A，T，G，C所有可能的两字母组合，

那么消息就只有原来的一半长度，但信息内容仍然相同。

如果有一条英文消息，你可以通过省略元音来压缩它，这条消息通常仍然可以理解。这说明书写英文是冗余的：拼写出来的内容比理解所需的要多。然而，要确定一条消息的信息内容，你必须知道它是用英文、法文还是别的什么语言写成的。更一般地，你必须知道特定长度被允许的消息有哪些。如果有了这些消息的列表，你就可以给它们编号，并通过其编号来指认其中的任何一个。这种用其编号来对可能消息进行的编码是没有冗余的，因此编码数的长度就是这些消息的信息内容的一个很好的度量。下面就是由此得到的一个合理的定义：

信息内容 = 被允许消息的个数的位数。

这是对一类被允许消息而不是单独一条消息的信息内容的定义（另一种观点是可能的，将在后面的章节中讨论）。当不同的消息并不都具有相同的概率时，此定义需要适当地调整，但在此我们无需赘述。[2]

对照熵的定义，我们也可以写出

信息内容 = $K\log$(被允许消息的个数)。

多数情况下，信息内容用二进制数字或比特表示。这意味着你用由两个“字母”0和1组成的一个字母表翻译消息，然后衡量其长度（或在上述公式前面乘上因子 $K = 1/\log 2$）。

在1948年发表的一篇论文中，[3]美国科学家香农独自创立了信息论。这一被讨论的理论涉及一个非常重要的实践问题：信息的有效传输。假设你有一个产生连续一串信息的源（一位政客正发表演说，或你正与岳母在电话上聊天儿——它不一定是什么有意义的信息）。

你可以视这串信息为若干给定长度的用英文写成的一连串消息，并以一定的速率产生。作为一位技术人员，你的工作就是将这些消息通过某条线路传输出去。这条线路可能是老式的电缆，或是瞄准某个遥远太空站的激光束。这条线路有一个确定的容量——它每秒可传输二进制数字（或比特）的最大值。如果你的信息源每秒产生的比特比你的线路容量大，消息就不能传输（至少不能按它产生的速率传输）。反之则可以，但你也许需要面对通过对原始消息适当编码以去除冗余的问题。（这叫做**数据压缩**；消息如果冗余是可被压缩的，但信息是不可压缩的。）

另一个会产生的问题是线路上的噪声。你可以通过以适当方式增加消息冗余的办法来克服它。下面是你所要做的。你编码消息的时候，引入额外比特的信息，使你在噪声改变一个字母时能够识别出来，再以另一些比特来纠正。换句话说，你采用了纠错码。只要线路的容量足够高，而噪声足够低，你也许可以通过纠错码战胜噪声。更准确地说，你可以将出错传输的概率调整到任意低。当然，这需要证明，纠错码的理论很难，但基本思想是简单的。

对信息的定义模仿对熵的定义，后者用于度量一个系统中出现的随机性量。为什么信息要用随机性来度量？只不过因为通过从一类可能的消息中选取一个，你就消除了存在于这类消息中的随机性。

信息论无论是在数学发展还是实践应用中，都已经是一个非常成功的科学门类。至于在物理理论的情形中，必须明白信息论涉及的毕竟还只是实在的理想化，而忽略了某些重要的特征。假设信息源产生的是一条随机序列的被允许消息（或一条有某些统计特性的无穷长消息）。根本不要求这些消息有用、逻辑上连贯或有任何意义。说一条消息具有高的信息内容，和说它是从一大类被允许消息中抽取

出来的，或它非常随机，是一回事。一些这样的随机性也许对应于有用的信息，一些也许就是垃圾。

让我们讨论一个例子：音乐的旋律。我们忽略各种细节，只考虑旋律是由音阶组成的字母表写出的消息。我们也许通过研究各个音符的频率和相继音符间音程的统计特性，试图获得一段旋律的信息内容(或随机性)(这是信息论中的标准步骤)。[4]如上所述，古老的音乐大多用一些小的音程，因而音程很少。而近代以来，各种各样不同的音程被越来越多地运用。由此人们可以得到这样的结论：(西方古典音乐中)乐曲旋律的信息内容(或随机性)已逐渐增加。[5]这是一个有趣的结论，但仍须持半信半疑态度。毕竟，对于乐曲旋律来说，总还有比相继音程的统计特性更多的东西。一段乐章有开篇，有结尾，中间还有相当一段结构。这结构不仅只对应于相继音符间的相关性(音程的统计特性)，还有通常的信息理论描述所不能捕捉的长程相关(跨越整个乐章的相关)。

而且，旋律中的信息也许新颖而富创造力，或者乏味而沉闷。如果将五线谱铺在一张天空图上，在星星的位置上标记音符，你就得到了含有大量信息的“天体音乐”，但绝不意味着它会是优美的音乐。

一件艺术作品的信息内容是一个重要的概念(它可以定义于油画、诗歌或歌曲)。这并不表示高质量等同于大量信息或微量信息。可能是除非有一个信息的最低限度，否则人们无法谈论艺术，但一些艺术家已经尝试非常低的价值。相反，许多艺术作品(油画或小说)的信息内容是巨大的。[6]

也许你正有些恼怒于我只讨论消息的信息内容，而悄悄地将消息意义的问题扫到地毯底下。更一般地，你也许觉得科学家忙于系统地解决形式上的和表面的问题，而忽略那些本质的东西。对于这

一批评的回答是，科学更为注重于好的回答(如果可能，和简单的回答)而不是深刻的问题。意义的问题显然深刻又复杂。它与另一些有关我们的大脑如何工作的问题相联系，而对于这些问题我们所知不多。因此，今天的科学还只能应付一些意义问题的相当浅显的方面并不足为奇。这些浅显方面之一就是在本章所讨论的意义上的信息内容，它带给我们的成果是显著的。我们可以用与度量熵或电流的量同样的方式去度量信息的量。这不仅有实际应用价值，还使我们得以洞察一些艺术作品的特性。当然，我们希望问一些更具挑战性的问题，但多数情况下，这些更难的问题对我们来说显然是难以回答的。来看音乐旋律，那是一些我们以为懂了的消息，但我们几乎不能说出它们的含义。音乐的存在是一个永恒的智力耻辱，但它还只是许多耻辱中的一个。科学家们知道要认识一些简单的现象(如水的沸腾或冻结)有多困难，他们发现有许多与人的心智(或大脑工作机制)有关的问题目前超出我们的认识之外时，并不过于惊奇。

注　释：

1. 鉴于 AIDS 病毒是一种 RNA(核糖核酸)病毒，四个字母原先并不是 A，T，G，C，而是由逆转录酶复制到这个字母表之中的。

2. 对于概率为 p_1，p_2，...的一族消息，其一条消息的平均信息内容是

$$平均信息内容 = -\sum_i p_i \log p_i。$$

如果有 N 条概率分别为 $1/N$ 的消息，则平均信息为 $\log N$。在许多情况下，布赖曼-麦克米伦定理(Breiman-McMillan theorem)将对于不等概率消息的研究转化为等概率消息的研究。关于信息论，包括布赖曼-麦克米伦定理，比较好的专业讨论请参看 P. Billingsley, *Erogdic Theory and Information* (New York: John Wiley, 1965)。

3. C. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell System Tech. J.* 27 (1948): 379~423, 623~656.

4. 要研究一段旋律的信息内容，人们需要与 2，3，4，...等连续音符的组合相对应的统计特性。但两个相继音符之间的音程很容易使对信息的估计过高。

5. 参看第 19 章注释 1 的参考文献。当然，人们必须比较具有相同长度的乐章，或是以乐章的长度划分信息。

6. 在特别的讨论中，应该指明被允许消息的族，例如用均一颜色绘制的长方形油

画。（这一类消息所包含的信息很少，因为人们只能选择长方形的尺寸和某一种颜色，而能够被分辨的选择项数并不是非常大。）也许在一个给定的艺术形式（像“抽象画”）中明确地限定被允许消息的族很难，但我们通常对自由度的把握有某种感觉，例如在写十四行诗或小说的时候。

22. (算法)复杂性

科学靠创造新的概念——物理学中新的理想化，数学中新的定义——而进步。一些新引进的概念在一段时间以后被发现是不自然或无成效的，另一些却变得比预期的更加有用和根本。信息就是现代科学中比较成功的概念之一。除了别的以外，信息还使我们接触复杂性问题。

我们周围到处是复杂的事物，但什么是复杂性？活的生物体是复杂的，数学是复杂的，太空火箭的设计是复杂的。什么是这些事物所共有的呢？嗯，很可能是它们都包括许多不易得到的信息。我们至今还不能凭空地造出活的生物体，我们要经过艰苦的工作证明一些数学定理，太空火箭的设计需要大量的努力。

含有难以得到信息的实体(entity)是复杂的。 我们还没有说明怎么叫“难以得到”，所以我们的复杂性定义没有明晰的含义。事实上，我们日常生活中所用的自然语言(这里就是英文)允许我们给出上述那种模糊得惊人的定义。这倒不是件麻烦事，而真的更令人欣喜

才是。但如果想要做科学(do science)，我们就必须更加精确、更加正式。因此，依赖于我们自己所处的背景，有了不止一个复杂性的定义。例如，关于生命复杂性的严肃讨论必须包括作为背景的生命在其中发展的物理宇宙。但也有一些基于纯粹的数学背景发展起来的复杂性概念。我现在将要讨论的，就是这样一个关于算法复杂性(algorithmic complexity)的概念。

简言之，算法就是执行某个任务的系统方法。例如，我们都已经学过两个整数相乘的算法。算法总是作用于一条输入消息，如“3 × 4”(用符号0，1，2，…，9，×写出)，然后返回一条输出消息，如“12”。当然，乘法是现今计算机最得心应手的问题，人们可以(用计算机里适当的程序)定义一个作为计算机所需执行任务的算法。我们所说的计算机，是指拥有无限大的存储器的一个有些理想化的机器。(因为商业计算机不能存储1E100位的数，所以我们不打算限定算法的定义。)

英国数学家图灵(Alan Turing)发明并精确描述了一种很适合于算法的理论研究的计算机，尽管在实际中实施这些算法会有明显的不当。**图灵机**(Turing machine)具有有限数目的**内部状态**(internal states)：一些所谓工作状态和一个停机状态。

图灵机在一条被分割成许多相连小方格的无穷长纸带上工作。(这条纸带即存储器。)纸带上的每个小方格内都标有一个从某有限字母表中取得的符号，其中之一是**空白**。图灵机以完全可预测的方式以相继时刻运行。如果处于停机状态，它就什么也不做。否则，这台傻乎乎的机器就会读它所在的方格，依据它的内部状态和刚刚读入的内容，做下面的事情：

(a) 擦去方格中原有的符号，写上别的什么东西(或同样的符号)；

(b) 向左或向右移动一格；

(c) 变至新的内部状态。

然后，机器依据它在新格子中读到的内容和它新的内部状态，开始另一个循环。

带子的初始状态包含有限的消息，即输入消息(带子的其余部分是空白，就是说，由标有“空白”符号的格子组成)。机器起始于消息的一端，并且安排好了使它在停机的时候写出一条自己的消息，此即答案。答案也许是“是”或“否”，或是一个数字，或一条较长的消息。人们可以装配一台图灵机来做整数的加法或乘法运算。事实上，图灵机所能做的比演算乘法要多得多：计算机可以完成的任何任务，一台合适的图灵机也可以完成。而实际上，人们根本不需要无数多台机器来应付不同的任务，因为*存在一种通用图灵机*。在这样的机器上执行一个特定的算法，人们必须在带子上写上既包括算法描述又包括有待处理的特定数据的输入消息。[1]

小结：算法就是可以在计算机上执行，也允许我们在一种叫做图灵机的非常原始的计算机上运行的东西。给定某个任务，存在着执行它的有效算法和无效算法，这取决于图灵机得到答案所需的循环次数。因此，一个问题的*算法复杂性*就取决于处理该问题的有效算法的可用性(availability)。有效算法的公认定义是，比较输入消息的 L (即它的信息内容)和得到答案所需的时间 T(通用图灵机循环的次数)。如果

$$T \leqslant C(L+1)^n,$$

其中 C 和 n 是常数，我们得到的就是*多项式时间算法*。[取这个名称的原因是，$C(L+1)^n$ 是一个关于 L 的多项式。]

多项式时间算法被认为是有效的，相应的问题则称为是**可解的**(tractable)。如果 $n=1$，那么执行算法所用的时间至多与输入的长度(加 1)成正比；如果 $n=2$，则与输入长度(加 1)的平方成正比；如此等等。可以证明，可解性(tractability)的定义并不依赖于所用的某个特定的通用图灵机。例如，考虑如下问题：输入消息是一个整数，我们希望知道这个整数能否被 2、3 或 7 整除。对你来说毫不稀奇，这些都是可解问题(也许你在学校中已经学过处理这些问题的有效算法)。

现代的计算机基本上都是通用图灵机(它们只有一点儿不足，那就是没有无限大的存储器)。因此，计算机科学家希望知道什么是可解问题。但发现一个有效算法可能是相当困难的。例如，直到近几年才被发现具有多项式时间算法的**线性规划**就是这么个情况。[2]专业上说，在线性规划中的问题是求凸多面体上一个线性函数的极大值。博弈论中的极小极大定理导致此类问题，资源配置中的许多问题也导致线性规划问题。因此，在这样的情况下，可解性的证明就具有相当重要的实用意义。

然而，有效算法并不总是可用的。假设对于一个问题，我们所知的唯一处理方法需要在所有长度为 L 的二进制消息中逐项搜索，则所需时间

$$T \geqslant 2^L。$$

这里，只要 L 增加 1，求解该问题所需的估算极小时间就要乘以 2。我们在前面的章节中见到过这种**指数增长**的例子，并确信这种增长很快就会得出很大的数。因此，指数时间算法不太实用。一般，没有多项式时间算法的问题被认为是**不可解的**(intractable)。

那么，什么是不可解的问题例子？为什么它们不可解？我建议

如果你把朋友中的一位看作是理论计算机科学家，就向他提出这些问题。尽量准备一块黑板，并给出几个小时来听取回答。并不是太难解释，但那，我们要说……有一点儿专业。它也是绝对令人着迷的。你的朋友将会定义 NP 完全问题,[3] NP 难题，并向你解释这些问题据信是不可解的。如果有人能证明 NP 完全问题(或 NP 难题)是不可解的，那简直太好了。而如果有人能证明它们是可解的，就更妙了……

不知所云了？好吧，这里我所能力求合理去做的一切就是，给出关于这些论题的简洁说明和据信是不可解问题的例子。

一个通俗的例子是流动推销员问题。你已知一定数量的城市间距离，及所允许给定行程的总里程数。(间距和总里程都是整数，用英里或其他单位制计量。)问题是，是否存在一条不超过所允许总里程数的路线可以连接所有的城市。这是一道肯定、否定判断题。如果提出某条线路，要检验它是否满足总里程数的条件是相当容易的。但当城市很多时，要逐一检验所有可能的线路就是不可解的了。这是 NP 完全问题的一个例子。

大体上，NP 完全问题需要“是”或“否”的答案，且具有这样的特点：人们可以在多项式时间内验证一个“是”答案的存在性。(这里，答案“是”或“否”是不对称的，因为人们不能说可以在多项式时间内验证一个“否”答案。)设“问题 X”是你最关心的判断问题。假设，如果你可以轻松得到流动推销员问题的解，问题 X 就成为可解的，而如果可以轻松得到问题 X 的解，流动推销员问题就成为可解的；那么，问题 X 称为是 NP 完全的。尽管进行了大量的搜索，仍未找到解决 NP 完全问题的多项式时间算法，且一般认为它根本就不存在。但这并未被证明。

介绍NP难题比较方便，它和NP完全问题一样难，但不需要“是”或“否”的答案。这儿有一个例子：**自旋玻璃问题**。输入消息是一个元素 $a(i, j)$ 为 $+1$ 或 -1 的数组，其中 i 和 j 从1到某个值 n（例如，从1到100，则数组由10000个 ± 1 组成）。问你如下表达式的最大值是多少

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a(i, j)x(i)x(j),$$

其中 $x(1), \ldots, x(n)$ 取 $+1$ 或 -1。因此，你不得不将每个取值为 $+1$ 或 -1 的共 n^2 个项相加，使结果最大。也许你不能相信这是一个不可解问题，也许它不是，但还没人找到解决它的一个有效算法。（注意：输入消息有 n^2 个比特，那么要想对每种情况逐一搜索，则需要考虑 2^n 种情况。）自旋玻璃问题是由**无序系统**（disordered systems）物理学提出的一族问题的原型。[4]［位点 i 和 j 之间的“相互作用”$a(i, j)$ 是无序的。］使 E 最大的问题，犹如是在一座山脉上找出它的最高峰（见图22.1）。在如图的情况下，这是容易的，因为 x 只在一条线上变化（也就是说，x 是一维的）。在自旋玻璃问题中，峰和谷的几何形状是 n 维……且不可解的（尽管对于其中任何一维来

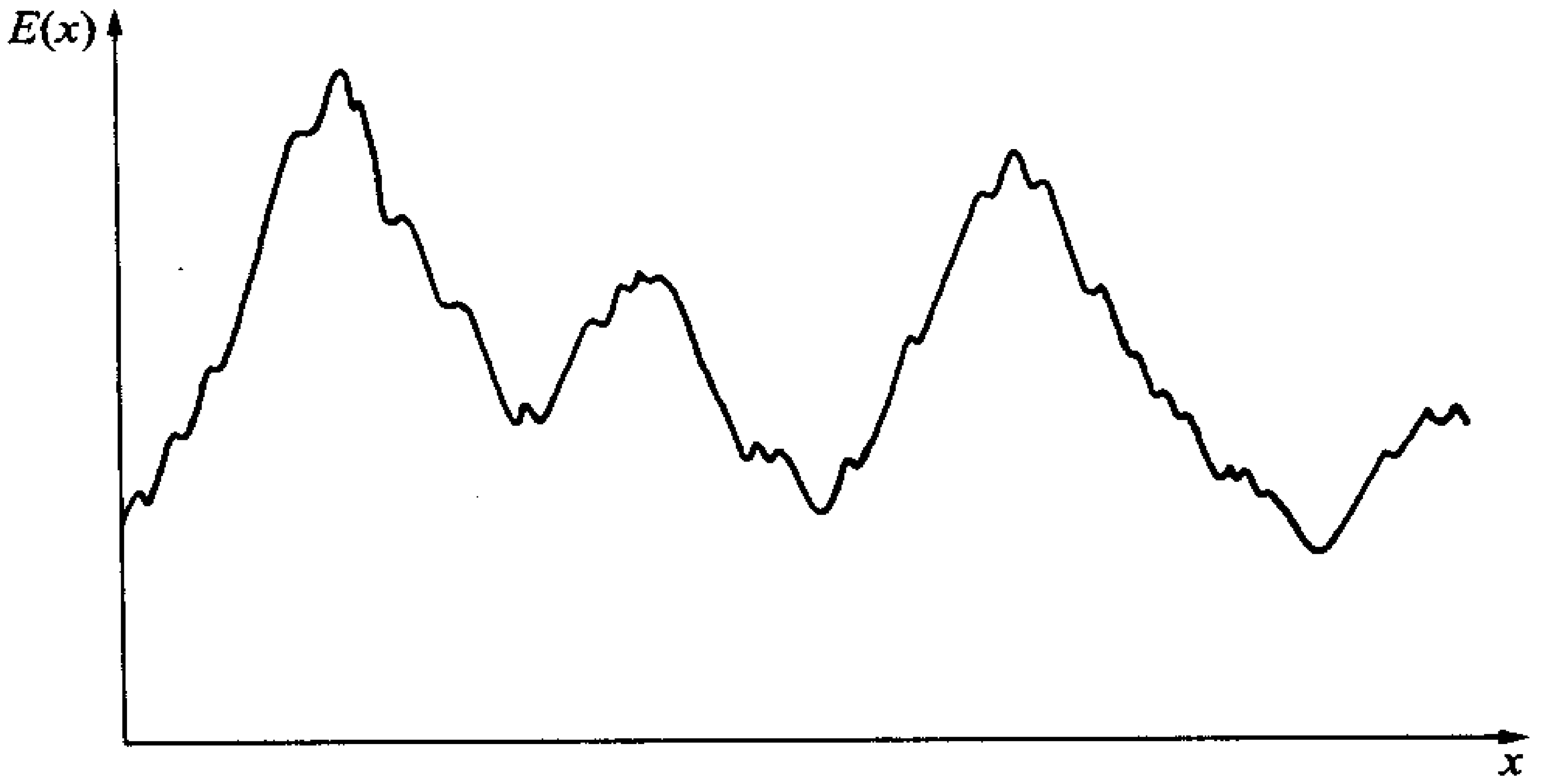


图22.1　$E(x)$ 的最大值是多少？

说，只可能取 +1 和 −1 两个值）。

让我们对生命问题进行理想化——或者，更好的说法是，做个比喻。依着这个比喻，生命问题就是要找出遗传消息 $x(1)$，...，$x(n)$，它能把某个非常大的值赋给像上面那个 E 一样的一个复杂的表述。按照我们刚才所说的，这也许是个很难的问题。但有迹象表明，上述关于生命的比喻也许并不是太荒谬。[5]

算法复杂性思想也许同样是作为对证明数学定理或设计太空火箭的难度的一个比喻。然而，我们会看到，证明定理的过程将带着我们走入比 NP 完全问题更深层次的复杂性：更深刻，更晦涩，更令人反感。

注　释：

1. 参看 M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability* (New York: Freeman, 1979)。这是关于算法复杂性的标准参考文献，特别地，还包含对图灵机的讨论。

2. 哈奇基扬（L. G. Khachiyan）发明了线性规划的一个有效算法，而卡马卡（N. Karmarkar）则给出了更加实用的一个。有限零和两人对策作为线性规划问题，有关它的表述请见第 6 章注释 1。

3. NP 代表非确定性多项式的（Nondeterministic Polynomial）。这是因为（正如下面将要讨论的）如果已经（非确定性地）给出了一个正确的猜测，那么一个肯定的答案可以在多项式时间内得到验证。所有 NP 完全问题都是一样难的：如果你可以解决一个，那么你就解决了所有的，因此限制是完全的。

4. 关于自旋玻璃和无序系统，参看 M. Mézard, G. Parisi, and M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and beyond* (Singapore: World Scientific, 1987)。加里（Garey）和约翰逊（Johnson）的书（本章注释 1）中没有讨论如我们所定义的自旋玻璃问题，但它与已知是 NP 完全问题的 SMC（"简单极大截断"）很相近。

5. 自然演化的树状结构，类似于自旋玻璃模型的 Parisi 解中谷（valleys）的树状结构（关于这点请参看前面注释提到的 *Spin Glass Theory and Beyond*）。这一类比似乎保持在定量的水平上（参看 H. Epstein and D. Ruelle, "Test of a probabilistic model of evolutionary success," *Physics Reports* 184 [1989]: 289～292）。

23. 复杂性与哥德尔定理

1931 年，出生于奥地利的逻辑学家哥德尔发表了很可能是 20 世纪人类所获得的独一无二最深刻的概念性成果。我记得 60 年代和 70 年代早期，在普林斯顿高等研究院见到哥德尔。他是个矮小瘦弱的男人，皮肤微黄，耳朵上带着一副棉耳塞。我听过一个关于他的很典型的故事。[1]一个到此访问的同行在哥德尔不在的时候，被允许使用他的办公室。据这位同行说，在他即将离开之前，留了一封致谢函在桌子上，说因为没能见到哥德尔而感到遗憾，希望以后有机会更亲密地认识他。一段时间以后，他收到一封哥德尔寄来的信。信封里装着他自己的那封短信，但哥德尔将*我希望以后有机会更亲密地认识您*这一句划出，并用铅笔添了一个问题：*您的意思到底是什么？*

哥德尔因绝食于 1978 年去世。他显然是因为怀疑人们想要毒死他，或是别的什么原因，而拒绝饮食。

如果算上玻尔兹曼和图灵（他是一名同性恋者，而这在他那个时代和所处的地方是不被接受的）的自杀，你也许得出这样的结论：科

学家是有相当自毁倾向的人群。这是完全错误的结论。事实上，大多数科学家都很正常，往往正常到迟钝和缺乏想像力的程度。如果我说在他们的科学研究中，许多人也是迟钝和缺乏想像力的，我觉得也不会被反驳。甚至他们的讣告也常常是枯燥乏味的陈腔滥调，哀悼他们的过早离世，指出他们在犹太教或教会团体中的积极作用，同时赞扬他们“有感染力的激情”，还有一些类似的废话。（有感染力的激情是一个令人悲哀的状况，常常只有在死后才被确定拥有。）

但还是让我们回到哥德尔。他的问题就是，至少他没有遭受（或让别人遭受）这种有感染力的激情。

要理解哥德尔的发现，也许考虑在科学家（特别是数学家）中常见，且对他们不无裨益的心理结构是个不错的主意。这种心理结构以有序、吝啬、固执为特征。弗洛伊德（Sigmund Freud）将其与易患强迫性神经官能症的体质和原欲（libido）发展过程中的所谓肛门虐待期相联系。[2]在任何情况下，这种心理倾向都自然而然地试图以尽可能简洁和有序的方式展现数学和数学推演。于是，伟大的梦想就是让数学以严格定义的推导规则和有限的几个被称为公理的完全明确的基本断言为基础。这一梦想始自希腊人欧几里得（Euclid，公元前3世纪前后），直到伟大的德国数学家希尔伯特（David Hilbert，1862～1943），引领着整个数学渐渐发展起了它的形式化。整数的运算较早被形式化，而数学家们伟大梦想的巅峰就是：希望对于每一个有关整数的有意义的断言，人们可以用一种系统的方法来判定它的真假。就是这个愿望，被哥德尔粉碎了。

哥德尔指出，如果你固定推导的规则和任意有限个公理，那么存在一些有意义的命题，它们既不能被证明也不能被否证。更精确地说，假设被整数认可的公理是*不矛盾的*，即假设通过运用推导规则你

永远不能同时证明一个断言为真(true)和为假(false)，那么，存在着不能由公理推得的整数的真属性。[3]而如果你接受任何一个这样的属性为新的公理，就会有其他一些不可证明的属性被保留下来。

哥德尔不完全性定理对于我们认识数学的基础有着关键的作用。首先，它是一个重大的打击。其次，它导致了数学家们信仰系统的逐渐改变。同时，困难的定理证明被简化了。这种简化得自于新概念的引入。那些概念部分归功于哥德尔，部分归功于其他人(图灵机就是一个相关的例子)。总之，不完全性定理的发现渐渐地转变了数学的景观。而结果是，如今不完全性定理显得相当自然，事实上都有些平凡了。早先的伟大愿望是，某组有穷的真断言(称为公理)能组成一个基础，自此可以导出所有关于整数的真断言。我们现在知道，**整数的全部属性**(即关于整数的全部真断言)没**有一个有限的基础**。我们对于为什么有限的基础不能够存在也有了一些直觉上的理解。而正如我接下来将要指出的，这又一次是以信息为基础。

我们在前面看到，已知一条消息所属的一族消息人们如何能定义这条消息的信息内容。特别是，如果所有由符号 0 和 1 组成的消息都被接受，那么一百万个 0 所组成的序列就有一百万比特的信息内容。由所罗门诺夫(Solomonoff)、柯尔莫哥洛夫和蔡汀(Chaitin)提出的另一个思想[4]是考察可以产生有意义的消息作为输出的最短的计算机程序的长度(以比特为单位)。在目前的情况下，这个程序应该类似于“打印一百万个 0” 什么的，而它的长度远远短于一百万。如此定义的量称为**算法信息**(algorithmic information)，或**柯尔莫哥洛夫-蔡汀复杂性**(简称 KC 复杂性)。这是在度量产生消息难度的意义上的复杂性(是程序长度意义上的难度，以比特为度量，而不是计

算时间意义上的难度)。依据计算机的选择，定义可能会有些不同，但人们可以选用通用图灵机作为例子。

如果消息“blah blah blah ...”有一百万比特*，则它的KC复杂性不可能比一百万多得多，因为你可以通过程序：“打印‘blah blah blah ...’”实现它。同样，如果一条消息有一百万比特，则它的KC复杂性通常不会比一百万少很多。(这意味着：例如，大多数消息不能被压缩至原消息长度的10%；只有很少的一部分可以。)这些都是相当容易的说明。

接下来让我转入更难一些的问题：已知某条消息，确定它的KC复杂性。你在打哈欠了，是吗？你并不关心KC复杂性？你觉得厌烦了？好吧，我正好利用你警惕性下降这一点，给你坏的建议……几分钟之后你就会被逻辑悖论所淹没，而请求宽恕。

我们如何确定一百万比特长的消息“blah blah blah ...”的KC复杂性呢？嗯，我们列出所有不比一百万比特长太多的程序，逐一将它们输入我们的计算机，看输出的结果。输出“blah blah blah ...”的那个最短程序的长度就是这条消息的KC复杂性。没有比这更容易的事情。实际上这也许需要太长的时间，以至于不能轻易完成，但你找不到任何理由说它在原则上不能被实现。是吧？

好了，好了，好了！当我们讨论这个问题的时候，也许可以请我们友善的计算机从KC复杂性至少为一百万的那些消息中打印出依字母次序第一个出现的那条消息。我将请你去查明在目前这样的语境中如何定义字母次序。还将请你编写出可以打印复杂性至少为一百万的第一条消息(依字母次序)的“超级程序”。这个超级程序应该

---

* blah意为空话，大话，废话。——译者

相当短(它只检验有限个程序，然后打印一个输出)。如果你对编程略微擅长一点儿，你的超级程序就应该少于一百万比特……这就是了，你深陷于悖论之中，正请求宽恕：你定义了一条KC复杂性至少为一百万的消息，而实现它的程序比一百万比特短，这与KC复杂性的定义相矛盾。

什么地方错了？逻辑学家会告诉你，你的错误是将程序输入后就坐在计算机前面，想像适当时间以后会产生一个输出。图灵机也许会在一些时候以后停机，产生一个输出，或者它也许永不停机，你**事先并不知道**。你不应该期望从图灵机那儿获得太多。特别是，你不应该期望获知对于一个给定的输入，它究竟是否会停机；没有算法可以判定这一点。事实上，也没有算法可以判定消息的KC复杂性——这是蔡汀所揭示的哥德尔定理的一个方面。

蔡汀指出像“消息‘blah blah blah ...’的KC复杂性至少为N”这一类的断言，当N充分大的时候，要么为假，要么不可证明。多大才是充分大？这依赖于你理论中所用的公理。你的公理包含一定量的信息(依赖于它们的总长度)，而你不能证明“blah blah blah ...”比你所用的公理包含的信息要多。这很有意义是吧？而事实上，要证明它并不太难。[5]

关于哥德尔定理，还有许多东西可讲，但鉴于不愿让自己(和你)太过沉溺于专业细节，我将只再就以下几点作些说明。

你也许已经被搅得心烦意乱，因为我说哥德尔定理是关于整数属性的定理，然后却又改为讨论消息的复杂性。事实上，人们可以将逻辑命题(例如，关于消息的复杂性)翻译成整数的属性。这个游戏开始于哥德尔，到通常所谓的“希尔伯特第十问题”的解达到顶峰。[6]因此，我们没有明确地提及整数的属性并没什么关系。

以我们考察哥德尔定理的方式，它的核心是当输入某个程序时，我们不知道图灵机是否会停机。对于有某个给定长度的程序来说，图灵机要么运行至某个最大时间然后停机，要么一直运行下去永不停机。如果知道对于每个程序长度，我们的图灵机的最大停机时间，我们就能够判定对于哪些程序它会停机，对于哪些它不会。（只要让它运行至给定程序长度的最大停机时间；如果到时它仍未停机，它就永远不会停机。）但问题的关键是，我们不知道最大停机时间。我们不可能知道，因为它比任何程序长度的可计算函数增长得都快——快于多项式，快于指数，快于指数的指数……

在前面的章节中，我们判定，一个问题如果不能在多项式时间内（说得更精确些，是关于程序长度的多项式）被解决，它就是不可解的。我们看到某些数学问题还要不可解得多。我们想知道事物的复杂性，而哥德尔定理告诉我们，整数的运算已经是我们所能想像得到的最令人难以置信的复杂了。

现在，进入最后一个问题：这一切与本书的主题有什么关系？哥德尔定理与机遇又有什么关系？我们知道人们永远可以不依赖于已知的那些整数属性而制造出一些新的来，但这些新的在某种意义上是随机属性吗？答案是肯定的，人们可以制造出一系列的整数属性，它们随机为真或为假（这一点已经被蔡汀明确地做到了）。[7]换句话说，人们可以基于整数的属性，定义出由相互独立且概率是 1/2 的二进制数字 0 或 1 组成的一个序列。这只不过意味着平均来说，没有哪种计算能力可以让你在对下一位数字预测的赌博中取得任何优势（即事实上序列是完全不可计算的）。

我们生活在一个奇怪的世界里，是不是？至少此刻这是逻辑学家给予我们的世界观。我们正在习惯它。世界观会再一次改变，变

得看起来甚至是疯狂的……而一段时间以后，我们又会习惯了。[8]

注　释：

1．我从卡迪森(R. V. Kadison)那儿听得这个故事。

2．下面这本(法文)书对于了解弗洛伊德工作的取向很有帮助：J. Laplanche and J.-B. Pontalis, *Vocabulaire de la psychanalyse* (Paris: PUF, 1976)。

3．如果一个断言从公理出发，既不能被证明，也不能被否证，则该断言为真，这是什么意思呢？ 要了解这个，就需要懂得数理逻辑学家做的所谓元数学(metamathematics)这种游戏的本质。 数学家有各种各样的理论 A，B，…，每一种理论都是基于一个据信是不矛盾的公理系统。 例如，A 可能是整数算术学的一个公理陈述，B 则是集合论的公理陈述。(哥德尔指出人们不能证明数学家们所用的各种公理系统都是没有矛盾的。 因此，这里需要某种信念。 但大多数数学家都完全相信他们正使用的算术学或集合论的公理中永远也不会产生矛盾。)公理、定理和理论 A 的推断规则，现在也许被看作是能够将理论 B 运用于其中的一些数学对象。 因此，人们现在可以从外部考察理论 A。 并且，可以说，通过这种方式能够使证明从内部难以达到的一些关于理论 A 的事物成为可能。 这就是元数学游戏，它非常棘手。 但如果你相信 A(和 B)是无矛盾的，像哥德尔不完全性定理这样的推论就是不可避免的了。

4．R. J. Solomonoff, "A formal theory of inductive inference," *Inform. and Control* 7 (1964): 1～22, 224～254; A. N. Kolmogorov, "Three approaches to the definition of the concept 'quantity of information,'" *Probl. Peredachi Inform.* 1 (1965): 3～11; G. J. Chaitin, "On the length of programs for computing finite binary sequences," *J. ACM* 13 (1966): 547～569。另请参看 G. J. Chaitin, *Algorithmic Information Theory* (Cambridge: Cambridge University Press, 1987); G. J. Chaitin, *Information, Randomness, and Incompleteness* (Singapore: World Scientific, 1987)。

5．定理2见于G. J. Chaitin, "Information-theoretic computational complexity," *IEEE Trans. Inform. Theory* IT－20 (1974): 10～15 的附录。这篇论文再版于 *Information, Randomnes, and Incompleteness* (pp. 23～32)(参看上一条注释)。

6．参看 M. Davis, Y. Matijasevič, and J. Robinson, "Hilbert's tenth problem. Diophantine equations: Positive aspects of a negative solution," in *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, Proc. Symp. Pure Math. 27 (Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1976), pp. 323～378。

7．参看第23章注释4引用的著作 *Algorithmic Information Theory*。只要有限的几项之后，蔡汀序列实际上变成随机的了。

8．卡蒂埃(Pierre Cartier)认为集合论的公理实际上是不一致的，但对该矛盾性的证明将会如此之长，以至于在我们这个物理宇宙中根本无法完成！ 更保守地说，我们可以期待数理逻辑进一步的发展将能够与最近获得公认的事物相容，但将给出数学基础的新阐释。

24. 性的真意

我们正在接近本书的尾声，你也许为还没有机会采取更多的主动而感到遗憾。不错，除了摇头反对和细细咀嚼，你的态度都是有些被动的。让我们改变它。我提醒你，现在，你正从事一项高尚而令人满足的事业：创造生命。

我们设想**你**已经创造了**天体**、**星系**，以及**这一切**。在**一张纸**上写几个**方程**，是**你**创造这个**宇宙**所必须要做的一切。现在，**你将生命**放入**你的消息**，并向**宇宙**发送**它们**。

如果你不介意，我将取消黑体字，用冷静的科学眼光看待并用普通字体叙述你和你的生命消息。必须记住的一个基本事实是，你的生命消息面对大量的随机性必须获得胜利。确实，经典混沌、量子不确定性，甚至哥德尔定理都企图在你所创造的宇宙中引入机遇。这将如何影响你的消息呢？

前面，我们讨论了用自旋玻璃模型作为一个生命比喻的问题。其思想是，存在一个函数

你的消息应该使它达到最大（或至少是相当地大）。我们可以设想，你的消息不得不自我复制，而且函数 E 与把一条原始消息完全不变地（或近似地）复制成一条新消息的概率有关。[1]函数 E 反映了你的消息所知有关宇宙的一切，特别是反映了宇宙的随机性。

如我们在关于算法复杂性一章中看到的，（使 E 最大的）自旋玻璃问题是 NP 难的。你不必为要尽力精确地解决它，或是要你自己来解决它而烦恼。你可以让你的消息照顾自己，这是一件明智的事情。希望通过试错，它能达到一个 E 的高值。你的消息实际上就是被赋予了复制能力的遗传消息。试错也就是随机突变，然后选择。我们回到了关于生命的相对传统的观点。突变和选择当然也是攻击自旋玻璃问题的一条途径，人们后来称之为**蒙特卡罗方法**（Monte Carlo method）（因机遇在那儿像在赌场一样起作用而得名）。不管名称是什么，我们看到试错法（trial and error method）很可能带着你一步步走向 E 的某个较大值，但不一定就是那个绝对最大值。从图 22.1 可以看到，你一步步去爬的山峰如果一开始就不对，就只能到达这座山的山顶，而不能到达最高的那座山的山顶。因此，突变和选择的方法是发展生命的一个好的途径，但一般来说，它给出的不是最优结果。

事实上，你的遗传消息越长，纯粹的蒙特卡罗方法就越不令人满意。事实确实如此，除非将突变一直保持在相当低的水平，否则，由于相继代间发生的突变，你的遗传消息中所包含的信息将会相当快地丧失。[2]但这意味着如此缓慢的突变、选择过程也只能将你带到图 22.1 中一座小山的山顶，而且你几乎永远不可能登上最高峰。

如你所见，创造生命引出了无数的麻烦。现在，你能做什么

呢？ 一个好主意是，考察函数

$$E(\text{消息})$$

并设法想清楚它的随机程度。 正如在你的生命消息的观点中已经看到的那样，它包含了宇宙所有的复杂性。 难道这个函数中没有任何可利用的规律性吗？ 宇宙是毫无意义的，还是有什么结构？ 所幸的是，宇宙中存在着规律性，甚至在你的消息层次就有表达。 那就是你可以将你的消息分割成具有自己含义的段，或句

消息 =（语句 A，语句 B，语句 C，...）。

语句 A，B，C 等等也可以被称为基因，它们的含义就是为各种不同的所谓酶编码。 但我并不想深入到遗传组织的层次，而是情愿去理解人们能将一条消息截断成有意义的数段这一事实如何与人们对宇宙结构的某种抽象理解相对应，因为这更为重要。 假设（通过突变）你得到如下这般的新消息

（语句 A^*，语句 B，语句 C）

或

（语句 A，语句 B^*，语句 C），

等等。 让我们设想这些突变都不太剧烈，因而消息（ABC ...），（A^*BC ...），（AB^*C ...）都使函数 E 具有了相当高的值。 这并不意味着重组的消息（A^*B^*C ...）能使函数 E 获得高值。 将两个合理的突变叠加也许会导致灾难性的结果，但通常都不是这样的。 也就是说，若（A^*BC ...）和（AB^*C ...）是合理的遗传消息，则通常情况下，（A^*B^*C ...）也是。 从函数 E 的层次表达就是，宇宙不是毫无意义的。 事实上，无论 A，B，C，...是基因片断，或不是基因

片断而是单个的字母(=碱基),上述论点都成立。

我们已经得到了一个重要的概念性结论。让我再陈述一遍。宇宙中存在着某种秩序,这一事实在你生命消息的层次上就有表达。它表现在,使突变消息(A^*BC ...)和(AB^*C ...)重组成消息(A^*B^*C ...)变得有意义。实现重组所经历的过程,称为性行为(sexuality)。[3]而你,那位**创造者**,看到重组对你的消息有益,就发明了性(sex),并将其赋予了你的创造物。这就是性的真意:宇宙中存在某种规律性,基因重组因此而有用。

不是遗传消息在什么时候由于突变而改变了一个字母,现在的可能性则是用别的字句取代某个字句。这当然明智得多了。(注意:人们也可以用别的方法,如删除遗传消息中的某些部分,或保留它们的几个复本。)

随着性的出现,生命的演化进程可以迅速得多。当然,突变继续发生着,但一种更明智的革新过程也正在进行——遗传消息的改组。当然,改组之后,要进行选择,以保留适者和幸运者。[4]

就这样,性使生命变得有趣得多。但人们也许容易就此而异想天开,热情洋溢地描述:基因疯狂的合作,从而使生命拥有越来越高的函数 E(消息)值。

现代研究给我们显现了一幅更为冷静的绘景,英国生物学家道金斯(Richard Dawkins)所写的一本令人着魔的书的书名《自私的基因》[5]就将它总结了出来。记得基因被定义为遗传消息有意义的基本片断。在没有突变的情况下,它们复制出和自己完全一样的复本,从而潜在地使自己成为不朽。植物或动物只是携载它们的必死的载体。有理由相信,许多基因只是在这些必死的载体上搭了一程顺风车,而根本没做任何有益的事情(甚或它们实际上可能是有害的)。

许多自私基因的同居生活可不是一件容易的事，这是相当浪费的。我们愿意给基因的集合中引入一些纪律。

我们该怎么做呢？ 我们再一次求助于你，伟大的科学家，生命的创造者，性的发明者，给我们一个使你的遗传消息更有效地工作的主意。

……？

你是什么意思？ 这全是一场误会？ 你不愿为创造生命再负更多的责任？ 或为它的发展？ 你确定？

真是太令人失望了。 你遗弃了你的创造物，而现在我们不得不写一份新的书稿。 彻底重新开始……

那么，天体，星系，以及这一切，都已经存在了。 我们确实不知道它们是如何生成的，但也没有什么严重的理由使它们不应该存在。 宇宙中有相当多的随机性，也有相当多的结构。 然后生命出现在宇宙中。 这显得相当容易，[6]但我们完全不知道是怎么回事。 小小的遗传消息是生命的基本，它们面临着宇宙中随机性的挑战，并通过试错适应着它。 然后，小小的基因消息发现了重组的艺术，它被称为性行为。 这对于它们来说是个很好的发现，因为这给了它们一个利用宇宙中一些结构的机会。

生命的遗传消息是自私基因们的集合。 但自然选择照料着它，使这些基因以一种不太浪费，也不是太没有效率的方式工作。 而生命创造了形态和装置的增殖，利用这个世界，利用宇宙结构的规律性。

因为宇宙结构中存在着规律性，因为生命懂得利用这种规律性，所以一种新的生命特征渐渐涌现了，我们称之为智能(intelligence)。

注 释：

1. 我们可以假设消息的后代与exp[E(消息)]成正比，并且允许从一条消息到与其非常相似的其他消息的突变。这个关于生命的模型或比喻的基本缺陷是，它没有反映一条消息与其他同类或异类消息之间关系的动力学特征(即，没有考虑种群动力学)。

2. 出于数学上的简化，我们这里考虑点突变(尽管其他类型的突变具有巨大进化意义)。点突变对应于在函数 E 提供的随机环境中的一种随机游动(random walk)。消息的后代与exp[E(消息)]成正比的假设，意味着 E 的大值具有优先权。人们知道在随机环境中的随机游动进行得非常缓慢，因为要从一座山走到另一座山，首先需要下山，而这是个非常不可能的过程(参看 Ya. G. Sinai, "Limit behavior of one-dimensional random walks in random environments," *Teor. Verojatn. i ee Primen.* 27 [1982]: 247～258；英译本：*Theor. Probab. Appl.* 27 [1982]: 247～258；E. Marinari, G. Parisi, D. Ruelle, and P. Windey, "On the interpretation of $1/f$ noise," *Commun. Math. Phys.* 89 [1983]: 1～12；R. Durrett, "Multidimensional random walks in random environments with subclassical limiting behavior," *Commun. Math. Phys.* 104 [1986]: 87～102)。因此，随机游动有被困在小山峰顶端的倾向。通过增加突变率可以避免这种情况，但这样的增长严格受制于保留有意义遗传消息的必要性。事实上，从拥有较短遗传消息的简单生物体到拥有较长遗传消息的复杂生物体，人们发现越来越多将突变降到越来越低水平的精确复制机制。从信息理论观点来看，事情应该如此是可以理解的。(参看 M. Eigen and P. Schuster, *The Hypercycle: A Principle of Natural Self-Organization* [Berlin: Springer, 1979]。)综上所述，我们明白了为什么进化要用那么多其他的伎俩，而不仅仅只是点突变(添加或删除遗传物质、性和共生对进化都很重要)。

3. 在活的生物体中，性并不是普适的，但却相当常见。有些细菌会进行基因重组，因此也具有了性。这并不意味着总是存在两种不同的性别(这是一个不大要紧的革新，不管它对我们如何重要)。

4. 通常认为性有助于进化，但也有反对的声音。参看 L. Margulis and D. Sagan, *Origins of Sex* (New Haven: Yale University Press, 1986)。

5. R. Dawkins, *The Selfish Gene* (Oxford: Oxford University Press, 1976).

6. 地球形成于4.5E9年前，而3.5E9岁的岩石就提供了生命存在的证据。以地质学标准来看，似乎是一旦环境条件允许，生命实质上就形成了。让我们顺便指出，那时候的函数 E(消息)与现在它所变成的样子截然不同。

25. 智　　能

马尔(David Marr)是麻省理工学院视觉信息处理和人工智能方面的专家。他的著作《视觉》[1]是近年来科学文献中非常重要的贡献之一。马尔是在得知自己患有白血病且将不久于人世之后，开始写这本书的。因此，《视觉》略过所有在科学文献中如此普遍的华而不实仪式似的废话，直接进入基本的问题。

进入我们眼睛的信息要经过从视网膜到视皮层(大脑后部的一个区域)各个不同的阶段。整个视觉处理系统极好地分析着我们周围发生的一切。一些自然的问题是：我们视觉系统的构造如何？到底它是怎么工作的？它是怎么出现的？但马尔问了一些别的问题：假设我们从零开始，要发明一套视觉系统，有哪些选择呢？如果你愿意，这将是一个工程问题。生物学的研究结果对这个问题有什么好处呢？对于所有这些问题，我们都只是一知半解。将这些拼合在一起，我们得到了一幅极具说服力的总体绘景，尽管其中的一些细节是不可靠的。

对我们的目的而言，重要的结果是：我们的视觉系统是专为适应一个确定的物理实在而构造的。这正是马尔经过分析之后，响亮而清晰地宣布的结果。我们的视觉系统不光是一个为了分析光强度和色彩图样，具有多种用途的小配件。它是为了看到三维空间中的物体而设的一个装置，这些物体由二维表面拼合而成，而每个表面又有边缘勾勒。视觉系统必须看到这些边缘，重建表面，再依据对于不同观察者来说都以特定方式照亮和安置的物体来解译它们。

我们睁开双眼的时候，接收到来自外界的大量信息。但由于外界有许多结构，所以眼睛接收到的消息是高度冗余的。假设对于一类允许的消息，视觉系统进行数据压缩。这种数据压缩开始于视网膜层次，而甚至在到达视皮层之前，这些视觉消息就已经经过了高度的处理和压缩。我们所看到的是解译图象，被为了适应具有特定类型的外部物理实在已由自然演化所塑造的视觉系统解译过的图像。

让我们回到发明一个有效的视觉系统的工程问题。这是人工智能中的一个问题。为什么是智能？我们所称的智能，是发生在大脑的心智活动。智能基于我们所感知的外部世界，指导我们的行为，因此，视觉消息的解译是智能的一部分。

要理解智能，很自然的想法是去研究大脑：研究它的解剖构造，用电极分析它的电活动，在显微镜下观察它的细胞，等等。当然，所有这些都已经做了，也得到了重要的信息(视觉系统方面的成果是显著的)。然而，对大脑的直接研究是有限的。考察大脑，很难重建如英语等自然语言。然而，语言在人类智能组织的作用中大概还是很重要的。正如语言问题显示出的，理解智能不大可能是一个容易的问题，将我们自己局限于任何单一的方法论，如神经生理学或心理学，都是不明智的。

工程师的方法对于研究视觉系统显得特别自然和合适。非常著名的是，这样的方法之一也曾被弗洛伊德用于分析性本能（sexual instinct）。弗洛伊德所谓的性与我们上一章所说的性，这两个概念尽管相互关联，但不尽相同。[2]这位精神分析的维也纳创始人描述了几种部分本能（往往与特定的性感应区相联系：口的，肛门的……），并依据它们解释性本能。部分本能在幼童时期分别出现。在事物的自然发展过程中，它们随后有组织地进入到功能性性行为之中。当部分本能没能如正常应该的那样得到整合，所谓的性倒错（perversions）就会发生（这里所谓的正常是指自然选择所最喜欢的；自然选择显然最喜欢导致生殖的行为）。

性本能和视觉系统基于它们的功能都是可理解的。系统的“错误”，即在一种情况下出现的性倒错和在别的情况下出现的视错觉，指导着我们的解释。对于视觉系统，我们对信息从视网膜到大脑是如何被处理的，有更进一步的相当详尽的了解。对于性本能和它的部分本能的研究并没有得益于解剖学和功能性上如此详尽的研究，而精神分析中提出的其他问题的处境还要差得多。事实上，精神分析的光荣——也是悲剧——在于它的方法论孤立，这也导致了许多科学家的轻视。弗洛伊德本人是个科学家，他创立了作为科学一部分的精神分析，但他的追随者们偏离了方向。人们只能希望方法论的进步将会逆转这种偏离的趋势。毕竟，精神分析本身关心“大脑软件”问题，而这些问题应该在某点上建立与神经科学的“硬件”研究富有成效的联系。

现在，让我们回到智能。将性本能、视觉系统，和其他一些此类装置拼在一起，人们或许能够得到一个合理的鼠脑或猴脑。但人类智力难道是完全不同且无比优越的另一种事物吗？嗯，可能不

是。认为并没有如此极端差异的一个原因是进化的观点，人脑的分化只是相对短时间内出现的（几百万年，也许远远少于复杂的自然语言发展起来所需要的时间）。因此，就新的小配件而言，从鼠脑或猴脑到人脑所需要的额外发展也许只是“点缀”一下而已。换句话说，人类特有的使用工具和掌握复杂语言的能力也许很容易就发展起来了，即使这伴随着脑大小相当可观的增加。

当然，我们具有智力的可能性远远高于鼠和猴：我们可以争论关于命运的神学问题，朗诵和欣赏诗歌，证明素数序列是无穷大。但我们所使用的大脑具有与鼠脑或猴脑基本相同的小配件。然而，我们如此优越的大脑却受困于简单的算术运算，不能准确地计算时间，不能轻易地记下几千位数字，这是令人悲哀的。（这就是我们要使用计算器、钟表、日历和通讯录的原因。）在从事科学的特别“高级”的活动中，我们似乎大部分运用的是我们的语言系统和视觉系统。将视觉系统的纳入是一大优点，这也正是为什么数学的几何学如此重要。

让我们做个总结。我们大脑和智能的基础，就是由严格适合于在某种类型环境中生存的各种小配件组成。直到最近，进化在这些基本的大脑技能中加入了一些非常灵活的高级功能。拥有这些高级功能当然受益匪浅，且得到自然进化的促进。作为副产品，这些高级功能也使人得以发展了科学知识。但在我看来，这似乎是一个意外。人脑缺乏做科学所需要的一些基本功能，如快速可靠的计算能力，或存储大量数据的能力。尽管存在这些不足，人类的科学还是得到了发展，我们也因此能够比我们有权期望的更多地了解事物的本质。

很显然地，我们生活在一个充满了都由二维表面所包围的三维物体的世界里。[3]因此，我们的大脑能够处理这样的物体并不令人惊

奇：这种技能有利于生存，得到了自然选择的促进。但自然选择不能解释我们如何开始了解天体的化学组成，或素数的微妙属性。自然选择只能解释人类获得了高级的智力功能；它不能解释为什么物理宇宙或抽象的数学世界中有如此之多的东西是可以理解的。

我们已经讨论过物理宇宙中应该呈现许多的随机性。我们已经讨论过许多数学断言应该不可证明。然而，我们还是如此深刻地认识了物质宇宙，认识了数学。

我们所谓的认识，很大程度上是与人类智能的特定本质相联系的。例如，我们在数学中如此频繁地使用自然语言，因为我们的大脑不能应付原则上要好得多的完全形式化的数学语言。（数学文献看起来已经足够形式化和不可理解的了，但还不是数学家所指的形式化的数学语言；如果你喜欢，可以称之为半形式化的。）我们用简短定理的形式表述我们的数学知识，因为我们不能消化冗长的表述。毫无疑问，非人类智力生物将用与我们颇为不同的方式做数学，对此我们可以从计算机正愈益作为数学研究辅助工具中窥见一斑。（现今的计算机不能应付自然语言，但并不反对使用非常长的代码。）简言之，我们做数学的方式是人类的，通常如此。但数学家们毫不怀疑在我们微不足道的存在（existence）之上，存在着数学实在（mathematical reality）。我们发现数学真理，我们未创造数学真理。我们向自己提出看似自然的问题，开始研究它。然后，并非少见地，我们（或别的什么人）找到了解答。我们知道答案不可能有什么不同。而奇怪的是，根据哥德尔定理，我们不能确保我们的问题可被求解。我们不懂为什么我们如此容易就接近了数学真理的世界。然而，绝妙的是，事实就是如此……

在数学的构架下，物理宇宙的可理解性也同样令人惊异。匈牙

利-美国物理学家维格纳(Eugene Wigner)曾经在他的一篇论文中描述了他的惊讶，这篇论文的题目非常意味深长：**数学在自然科学中不可思议的有效性。**[4]我们已经得知宇宙如何广袤，而我们在其中如何无关紧要。然而，绝妙的是，我们能够深入这一宇宙的最深处，并且认识它。

注 释：

1. D. Marr, *Vision* (New York: Freeman, 1982).
2. 弗洛伊德所感兴趣的过程，是心智(mind)过程。
3. 将我们的世界看成是三维的，其中含有由表面包裹着的物体，这当然是一种理想化。科学家们也使用许多其他的理想化，但这个特殊的理想化受到了演化的鼓励，且已经深深地嵌入到我们的头脑里。这个理想化对我们很有用，无论是对生存还是对几何学及其他科学的发展。
4. E. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences," *Commun. Pure Appl. Math.* 13 (1960): 1～14.

26. 结语：科学

让我们回到几千年前。夜幕降临，一天的工作都已结束，油灯点亮。我们谈论地区的大事，以及如何靠观察天空中的星座计划农活儿。我们议论旅行者们带来的传说和他们说的陌生的语言。还有关于神仙、某条法律、或是某种植物药效的争论。这些都显示出智慧生物所拥有的好奇心，如此迫切地想要了解这个广袤世界的秘密和事物的本性。我们将这种好奇心变成各种各样的问题：如何解释梦和知悉未来，如何理解天空中的征兆，或如何用一根细绳儿弯一个直角（做一个边长是3，4，5的三角形）。

现在，几千年之后，当我们回顾过去，我们发现一些古老的话题已经被遗忘：古代诸神的品性对我们已没有什么吸引力。一些问题却没有多大的改变：什么是艺术的真性？什么是意识(consciousness)？但对于其他一些问题的研究导致了完全改变人类状况的科学技术的巨大成就。从用一根细绳儿弯一个直角，数学得以发展。试图理解天体的运动，导致了力学和物理学的创建。后来，生物学和现代医学

兴起，取代了对药用植物的研究。

与人类好奇心的其他领域相比，科学的遭遇是不同的，不是因为好奇心有什么不同，而是因为提出的对象和概念不同。讨论三角形的性质比讨论梦的解释更有利可图。研究摆的运动比研究意识的本性有更多的回报。旧的哲学问题有时被科学阐明，有时又搅乱科学。但内省(introspection)提出的问题常常得不到回答，而一旦答案出现，人们倾向于知性上的信服而不是心理上的满足。[1]

机遇和随机性在精确的研究中不像是很有前途的论题，事实上被许多早先的科学家回避。然而，如今在我们认识事物的本性时，它们起着核心的作用。给出这一作用的思想，正是本书的目的。我们看到，在物理理论中我们如何将周围的世界理想化，而混沌如何限制我们在这个世界的演变中所施以的智力控制。我们看到，对机遇的正确估计以及可预见性对于人类的日常生活和历史有多么重要。我们介绍了度量一升水中分子混沌的随机性程度的概念熵。我们浏览了复杂性问题，我们看到要想触及有用的信息也许是如此之难。我们还发现机遇甚至存在于自然数1，2，3，...的属性中。

现在，让我们最后考察做科学的人。

从与许多同事的讨论中，我得到这样一个结论：我们这代物理学家分成两大类。一些人在年轻的时候，以做有趣的化学发展他们的科学兴趣。另一些则更为电学和力学所吸引，花时间拆弄收音机、闹钟什么的。我是一名坚定的化学家，偶尔很愉快地与一些同行或别的什么人比较对于过去我们做过的各种疯狂事情的记忆。像制备硝化甘油或雷汞，或用派莱克斯耐热玻璃试管煮沸浓硫酸。(我真的不提倡做任何一件这样的事情，特别是后者。)当我问美国物理学家惠勒(John Wheeler)他属于化学门类还是电学—力学门类时，他说：

"都是。"在场的他的妻子抓住他的手说："给他看看你的小手指，约翰尼。"他不得不让我看他那根因为年轻时做某个"有趣的实验"而缺掉一块的手指。然而，物理学家盖尔曼(Murray Gell-Mann)告诉我，他虽然没有沉湎于什么有趣的科学，但读了不少科幻小说。

由于毒品和恐怖主义问题，有趣的化学近来不太受到鼓励，拆弄收音机或闹钟也变得越来越没什么意思(里面几乎没剩下什么可看的了)。因此，人们在电脑中寻求刺激。而这一定会产生不同类型的物理学家。无论如何，物理学家的科学生涯都开始于某种迷恋——那种着魔般的迷恋，也许是对有趣的化学；更合逻辑的是对电学—力学装置和计算机。我不考虑那些不相关的人们，他们靠"做研究"(doing research)谋生，但如果可以选择的话，他们情愿看电视上的棒球比赛。

数学家，和物理学家一样，也为某种强烈的迷恋推动。数学研究是艰难的，即便有回报，对智力仍是痛苦的挑战，没有某种强烈的欲望，你就不会干这行。

推动物理学家、数学家及大概还有别的科学家们的那种欲望的来源，那种迷恋，究竟是什么？精神分析认为是出自性好奇(sexual curiosity)。你从询问婴儿从何而来开始，问题接踵而至，然后你就发现自己正在制备硝化甘油，或是求解微分方程。这个解释有些恼人，但因此也就很可能基本正确。性好奇是科学的根源，但它被别的东西取代了，那就是世界是可认识的这一事实。从纯心理学的角度探讨科学会忽略数学的可理解性的重要性，忽略"数学在自然科学中不可思议的有效性"。事实上，一些从事"软"科学的科学家们似乎也忽视了这些。但数学家和物理学家知道他们所与之打交道的是一个有其自身规律的实在，一个高于我们琐碎心理问题的实在，一

个陌生、迷人和某种意义上优美的实在。

此刻，我原打算给出一段有关解答科学之谜的崇高性的感人描述。但我觉得你不会同意……你想谈谈俄狄浦斯(Oedipus)，那个如此沾沾自喜地回答了斯芬克司(Sphinx)之谜，却以此开始了一连串如此悲惨和灾难性事件的人。接下来的三千年，剧作家和精神分析学家们就一直为他这一生忙碌着。科学家也是从回答谜语开始的，然后炸掉几根手指，再后来也许是整个地球。难道科学家不应该更负责任地行事吗?

这最后一个问题的答案是明确的：科学完全与道德无关，完全不负责任。个体科学家的个人行为依据他们个人对道德责任的理解(或缺乏)，但他们只是作为人来行动，并作为**科学**的代表。让我们举个例子。我们习惯于称谓的大自然(Nature)已经降级变为我们的环境，且正在进一步降级成为我们的废品旧货栈。这是科学的错吗?科学确实可以帮助毁灭大自然，但它也能帮助保护环境，或帮助评估污染：决定全都在于人类。科学回答问题——至少有时候是的——但它从不做决定。人类做出决定，或至少有时候他们做出决定。

很难估计人类真正有什么选择。世界末日即将到来，还是它能被无限期地推迟?我们所用的大脑与我们石器时代祖先们的一样，显示出惊人的灵活性。他们用脚奔跑，用矛狩猎，现代人则驾驶汽车，出售保险。除非很快发生什么大灾难，否则这些将会有更大的改变、更大的进步。至少对于严肃的学术工作来说，我们石器时代的大脑正渐渐被废弃，并将被更快、更强大、更可靠的机器所取代。**科学**将改进我们陈旧的遗传复制机制，消除各种可怕的疾病。且我们不能说**不**。出于社会学的原因，我们没有权利选择说我们拒绝所有这些美好的进步。但人类能否从我们无法避免地加之于自己物质

和文化环境上的改变中存活下来呢？ 我们不知道。

现在，和以前一样，人类的未来依旧是难以预料的。 我们不知道自己正走向一个更加壮丽的未来，还是走向无可避免的自我毁灭。

注　释：

1．在这儿应该提及一部奇特而有趣的读物：R. Penrose, *The Emperor's New Mind* (New York: Oxford University Press, 1989)。 它是对当今科学思想精彩的阐释。 同时，它又是一个精心的借口，提出物理学定律应该改进以容纳意识、内省等我们心智不同于计算机的功能。 显然，物理学定律将必须改变以容纳量子引力，但我很怀疑这是否会与彭罗斯(Penrose)的思想一致。 当处理意识和内省确定性时，我们应该始终牢记在自我欺骗(self-deception)方面，我们的头脑是如何狡黠，如何有力。 这是精神分析学不可轻易忽略的一个教训。